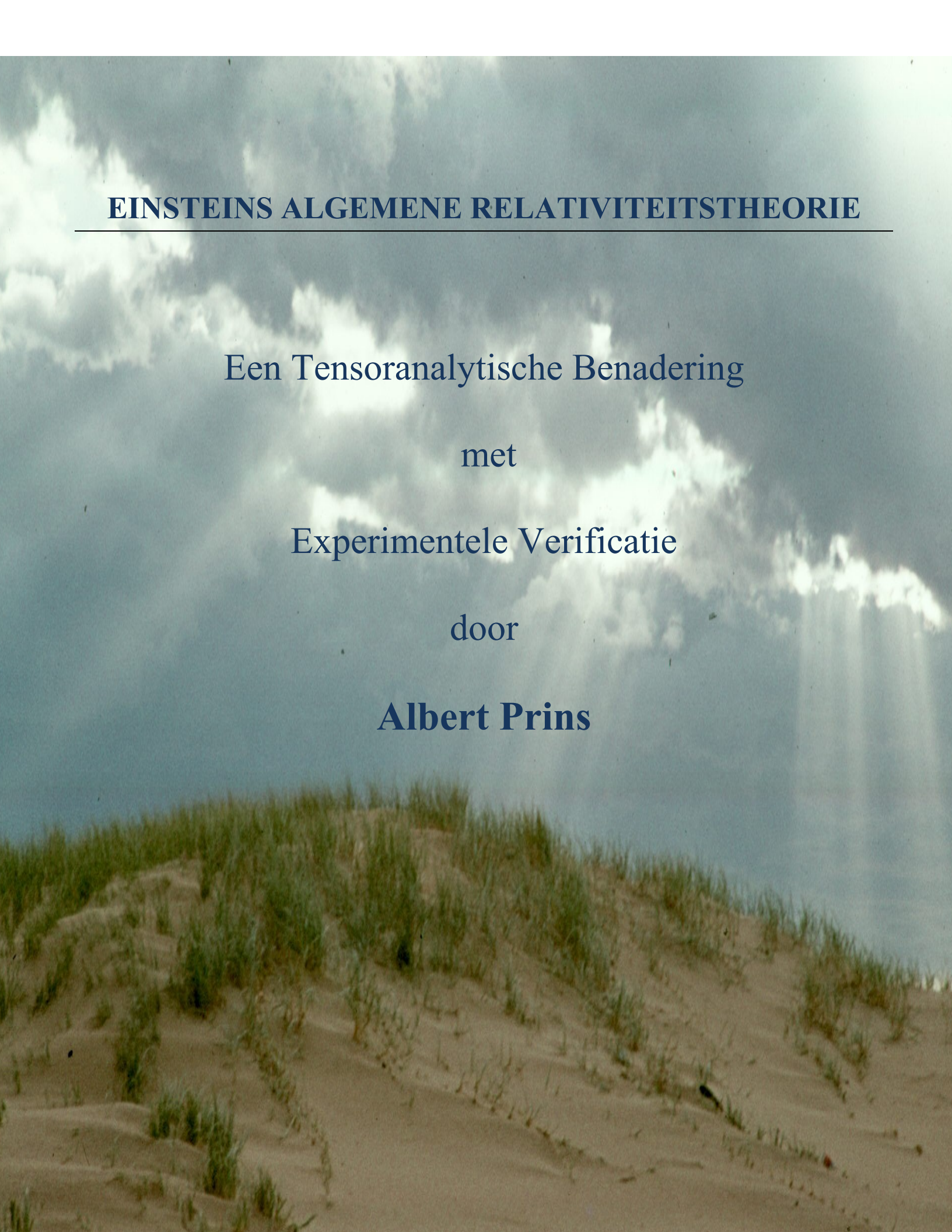




EINSTEINS ALGEMENE RELATIVITEITSTHEORIE

Een Tensoranalytische Benadering

met

Experimentele Verificatie

door

Albert Prins

Voorwoord

De algemene relativiteitstheorie van Albert Einstein roept, ook ruim een eeuw na haar publicatie, nog steeds veel vragen op. Van geïnteresseerde leken tot gevorderde studenten natuurkunde: velen zoeken naar een begrijpelijke en wiskundig onderbouwde uitleg van deze fascinerende theorie.

Om dat doel te bereiken hebben wij dit document geschreven. In deze tekst bieden we een beknopte beschrijving van de theorie zelf. Daarnaast geven we een systematische afleiding van de Einstein-veldvergelijkingen die aan de basis liggen van Einsteins model van ruimte en tijd.

Verder besteden we ruim aandacht aan experimenten die de theorie ondersteunen, zoals de precessie van de baan van Mercurius, de afbuiging van licht door een zware massa, het experiment van Hafele & Keating en de toepassing van de Schwarzschild-oplossing op een klassieke kogelbaan. Elk voorbeeld is zorgvuldig uitgewerkt en helder toegelicht, zowel kwalitatief als kwantitatief.

Met dit werk hopen we een brug te slaan tussen theorie en praktijk, intuïtie en formalisme, en vooral tussen verwondering en begrip.

Wij waarderen alle vormen van feedback. Suggesties, opmerkingen of correcties zijn van harte welkom via:

aprins@hotmail.com

Met vriendelijke groet,

Albert Prins

Dit document is online beschikbaar via:

<https://www.albertprins.nl/>

en

Nederlandse versie:

http://www.prinikx.synology.me/familyprins/astronomy/GR/AlgemeneRelativiteit_AlbertPrins.pdf

https://saya-pangeran.github.io/familyprins/astronomy/GR/AlgemeneRelativiteit_AlbertPrins.pdf

Engelse versie:

http://www.prinikx.synology.me/familyprins/astronomy/GR/GeneralRelativity_AlbertPrins.pdf

https://issuu.com/aprins6/docs/generalrelativity_albertprins_pag1-pag48

Inhoudsopgave

1	Inleiding	7
1.1	Doel van dit document	7
1.2	Aanpak	7
1.3	Doelgroep	8
1.4	Tot slot	8
2	Algemene Relativiteitstheorie	9
2.1	Het Equivalentieprincipe	10
2.2	Kromming van Ruimte-Tijd	13
2.3	Covariante en Contravariante Vectoren en Duale Vectoren	17
2.4	Covariante en Contravariante Transformaties van Tensoren	22
2.5	Christoffel-symbool en de Covariante Afgeleide	26
2.6	Geodetische Vergelijking en Christoffel-symbolen	41
2.7	Christoffel-symbolen uitgedrukt in termen van de Metrische Tensor	46
2.8	Geodetische Vergelijking en haar Newtoniaanse Limiet	50
2.9	Generaliseren van de Definitie van de Metrische Tensor	55
2.10	De Riemann-Krommingstensor	58
2.11	Symmetrieën en Onafhankelijke Componenten	71
2.12	Bianchi-Identiteit en Ricci Tensor	75
2.13	Energie-Impuls Tensor	79
2.14	Einstein Tensor	84
2.15	Einstein-Veldvergelijkingen	88
2.16	Samenvatting van de Eindformule voor de Algemene Relativiteitstheorie	94
3	Schwarzschild-Metrick	101
3.1	Besprekingen over de Schwarzschild-Metrick	101
3.2	Relatie van de Schwarzschild-metrick en Noether's stelling	104
3.3	Fysische interpretatie van de Schwarzschild-Metrick	107
3.4	Experimenten: Bevestiging van de Algemene Relativiteit	125
4	Experimenten ter bevestiging van Einsteins Theorie	128
4.1	Experiment 1 - Het Hafele & Keating-Experiment met de Schwarzschild-Vergelijking	128
4.2	Experiment 2 - Beweging van Deeltjes in Schwarzschild-Geometrie	147

4.3	Experiment 3 - Afbuiging van Licht.....	158
4.4	Experiment 4 - Precessie van de Periheliën (Mercurius).....	167
4.5	Experiment 5 – Shapiro-Tijdvertraging.....	182
4.6	Tijdsrelatie tussen Waarnemer op Aarde en het Centrum van de Zon.....	191
4.7	Alternatieve Afleiding van de Baanvergelijking.....	195
4.8	Experiment 6 - Berekening van een Kogelbaan.....	202
5	Coördinatensystemen	214
5.1	Rechthoekig (Cartesiaans) Coördinatensysteem	214
5.2	Niet-Orthogonaal Coördinatensysteem	214
5.3	Gekromde Coördinaten	215
5.4	Algemene Vorm voor een Coördinatensysteem	216
5.5	De Metrische Tensor en Einstein-Notatie	216
5.6	Transformatie tussen twee Coördinatensystemen	217
5.7	Transformatie tussen Cartesiaanse en Sferische (infinitesimale) Coördinaten	219
5.8	Oefening: Toepassen van de Metrische Transformatieformule	222
5.9	Verdere Overwegingen over Co- en Contravariante Transformaties	226
5.10	Overwegingen over de Minkowski- en Schwarzschild-Formules	231
5.11	Schwarzschild's: "On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory"	236
6	Controle of de Schwarzschild Metriek voldoet aan de Einstein Veldvergelijkingen	238
6.1	Verificatie aan de Volledige Veldvergelijkingen	238
6.2	Controle van R_{00} , R_{11} , R_{22} en R_{33} in de Schwarzschild-Metriek	241
6.3	Controle van de Ricci-Tensorcomponenten R_{00} , R_{11} , R_{22} en R_{33} in Schwarzschild-Coördinaten.....	243
6.4	Controle van de Schwarzschild-Oplossing met behulp van een gesimplificeerde vorm van de veldvergelijkingen.....	246
6.5	t , x , y , z Coördinaten.....	247
6.6	Controle van de Ricci-Componenten in Sferische Coördinaten	249
7	Antwoorden op Vragen	252
7.1	Afleiding van de Schwarzschild-Formule naar de eigen tijd τ	252
7.2	Toelichting op de Transformatieformule van Einstein	254
7.3	Antwoord op vragen betreffende Schwarzschild	256
7.4	Gedetailleerde afleiding van de Einstein-Vergelijking (57) vanuit vergelijking (53)	262
7.5	Vraag over vergelijking in Einsteins origineel werk (Engelse versie).....	266

7.6	Vraag over Einsteins vergelijking (69)	268
Appendix 1	Formules van de Algemene Relativiteitstheorie	270
Appendix 2	Afleiding van Afgeleide van de Christoffel-Symbolen in een Algemene Vorm	278
Appendix 3	Wiskundige Uitwerking van Schwarzschild	278
Appendix 4	De Schwarzschild Formule uitgebreid voor Elektrische Ladingen.....	280
Appendix 5	Schwarzschild Oplossing binnen een Massa $\rho = \text{const.}$ -Volledige tensorafleiding.	285
Appendix 6	Afleiding van de Stelling van Gauss	304
Appendix 7	Afleiding van de Laplace- en Poisson-vergelijkingen.....	306
Appendix 8	Getijdenkrachten.....	314
Appendix 9	Speciale Relativiteitstheorie	315
Appendix 10	Specifiek Hoekmoment	344
Appendix 11	Overwegingen over Rotatie.....	346
Appendix 12	Afleiding van de Euler-Lagrange-vergelijking	349
8	Bibliografie.....	354
9	Interessante websites:.....	355

EINSTEINS ALGEMENE RELATIVITEITSTHEORIE

Een Tensoranalytische Benadering

met

Experimentele Verificatie

door

Albert Prins

Deel I – Inleiding en Basisstructuur

1 Inleiding

De algemene relativiteitstheorie, in 1915 geformuleerd door Albert Einstein, vormt een van de pijlers van de moderne natuurkunde. In deze theorie maakt het klassieke zwaartekrachtmodel van Newton plaats voor een geometrische benadering, waarbij massa en energie de structuur van ruimte en tijd vervormen. Objecten bewegen overeenkomstig deze vervorming.

Zwaartekracht wordt dus niet langer opgevat als een kracht die op afstand werkt, maar als het gevolg van de kromming van de ruimte-tijd. Dit idee heeft diepgaande implicaties voor zowel de theoretische als de praktische natuurkunde.

1.1 Doel van dit document

Dit document beoogt een diepgaand en gestructureerd overzicht te bieden van de algemene relativiteitstheorie, met nadruk op:

- De zorgvuldige afleiding van de onderliggende wiskundige structuur, waaronder tensors, covariante afgeleiden en veldvergelijkingen.
- De bespreking van experimenten en toepassingen die de theorie ondersteunen of illustreren.
- Het beantwoorden van veelgestelde vragen over concepten, formules en interpretaties binnen de relativistische fysica.

Het is bedoeld als brug tussen abstract formalisme en fysische intuïtie.

1.2 Aanpak

In tegenstelling tot populaire inleidingen ligt in dit document de nadruk op wiskundige exactheid en systematische afleiding. Daarbij hanteren we de volgende werkwijze:

- We leiden stap voor stap de tensoranalytische vergelijkingen af die de basis vormen van Einsteins veldvergelijkingen.
- We besteden uitgebreide aandacht aan coördinatentransformaties, covariante afgeleiden en het gebruik van de metrische tensor.
- We passen de Schwarzschild-oplossing toe op concrete experimenten, zoals het Hafele–Keating-experiment, de afbuiging van licht nabij de zon en de precessie van Mercurius.

Ook tonen we aan dat de Schwarzschild-oplossing voldoet aan de Einstein-veldvergelijkingen, en beschrijven we hoe ruimte-tijkromming wiskundig vorm krijgt via de metriek en de Christoffel-symbolen.

1.3 Doelgroep

Deze tekst is geschreven voor:

- (Geo)fysici en wiskundigen die geïnteresseerd zijn in de wiskundige fundamenteën van de algemene relativiteitstheorie.
- Studenten natuurkunde die verder willen gaan dan standaard leerboeken.
- Geïnteresseerden die niet alleen willen weten *hoe* de theorie werkt, maar vooral ook *waarom* de vergelijkingen precies zo zijn opgebouwd.

Een zekere basiskennis van wiskunde, met name lineaire algebra en differentiaalvergelijkingen, is aanbevolen.

1.4 Tot slot

Met dit werk hopen we een brug te slaan tussen theorie en praktijk, tussen formalisme en inzicht. Elk hoofdstuk bouwt voort op het vorige, maar de secties zijn zodanig opgezet dat ze ook afzonderlijk te begrijpen zijn.

De bijlagen aan het eind bieden extra uitleg, alternatieve afleidingen en toepassingen in verwante gebieden zoals de speciale relativiteitstheorie, kernfysica en rotatiemechanica.

Deel II – Afleiding Algemene Relativiteitstheorie

2 Algemene Relativiteitstheorie

Voordat Einstein in 1915 zijn beroemde algemene relativiteitstheorie formuleerde, ontwikkelde hij eerst de **speciale relativiteitstheorie** (zie [Appendix 9](#)), die hij in 1905 publiceerde. Deze theorie beschreef natuurkundige verschijnselen in inertiële (niet-versnellende) coördinatenstelsels – dus stelsels die zich met constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen. De invloed van massa en zwaartekracht werd daarin nog buiten beschouwing gelaten.

De speciale relativiteitstheorie steunt op twee fundamentele principes:

1. **De lichtsnelheid in vacuüm is constant** en bedraagt in elk inertiaal stelsel:

$$C = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

2. **De natuurwetten zijn in alle inertiële stelsels gelijkvormig** – er is geen voorkeursstelsel.

In tegenstelling tot de klassieke mechanica, waarin de tijd universeel werd verondersteld, laat de speciale relativiteit zien dat tijdsintervallen afhangen van het gekozen referentiestelsel. In een bewegend stelsel verlopen tijdsintervallen langzamer dan in een stilstaand stelsel (**tijddilatatie**). Ook wordt de lengte van objecten ingekort in de bewegingsrichting (**lengtecontractie**) (zie ook [Appendix 9.2](#)). Beide verschijnselen zijn afgeleid uit het uitgangspunt van een constante lichtsnelheid voor elke waarnemer, ongeacht diens snelheid.

Omdat ruimte en tijd onderling afhankelijk blijken, voerde Einstein het begrip **ruimte-tijd** in: een vierdimensionale structuur waarin ruimte en tijd zijn verenigd. Een gebeurtenis heeft hierin niet alleen ruimtelijke coördinaten (x, y, z), maar ook een tijdcomponent (t), die samen het pad in ruimte-tijd bepalen.

Een van de meest iconische uitkomsten van deze theorie is de massa-energierelatie:

$$E = mc^2$$

Deze formule drukt uit dat massa en energie equivalent zijn. Ze is van fundamenteel belang in onder meer kernfysica en kosmologie (zie [Appendix 9.9](#)).

Na deze ontwikkeling richtte Einstein zich op een verdere generalisatie van zijn theorie naar stelsels die wél versnellen. Daarbij werd zwaartekracht niet langer als kracht opgevat, maar als een manifestatie van de kromming van ruimte-tijd door massa en energie. Dit leidde uiteindelijk, in 1915, tot de formulering van de **algemene relativiteitstheorie**.

Een overzicht van de eindformule van Einsteins veldvergelijkingen is te vinden in hoofdstuk [2.16](#). De komende hoofdstukken bouwen stap voor stap toe naar deze vergelijking, beginnend bij het equivalentieprincipe en eindigend bij de tensorstructuur van ruimte-tijdkromming.

2.1 Het Equivalentieprincipe

In zijn zoektocht naar een uitbreiding van de speciale relativiteitstheorie naar situaties waarin zwaartekracht optreedt, kwam Einstein tot een diepgaand inzicht: zwaartekracht en traagheid zijn lokaal fysiek equivalent. Dit inzicht vormt de basis van de algemene relativiteitstheorie.

2.1.1 Vergelijking met andere krachten

Om het unieke karakter van zwaartekracht te begrijpen, vergelijken we haar met andere fundamentele krachten zoals de elektrische en magnetische kracht.

Elektrische kracht

Tussen twee geladen deeltjes met ladingen q_1 en q_2 werkt een kracht volgens de wet van Coulomb:

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

waarbij r de afstand tussen de ladingen is, en k_e de elektrische constante. De resulterende versnelling van een deeltje hangt af van zijn massa:

$$F = m_1 a_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow a_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{m_1 r^2}$$

De versnelling is dus afhankelijk van zowel de lading als de massa van het deeltje.

Magnetische kracht

Ook magnetische krachten veroorzaken versnellingen, afhankelijk van de lading, de snelheid van het deeltje, de oriëntatie en sterkte van het magnetisch veld, én de massa.

Zwaartekracht

Volgens Newton wordt de zwaartekracht tussen twee massa's m_1 en m_2 gegeven door:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

waarbij G de gravitatieconstante is en r de afstand tussen de massa's.

Op basis van analogie met de elektrische kracht zouden we kunnen verwachten dat er een onderscheid is tussen een **gravitiemassa** m_{grav} , die de zwaartekracht veroorzaakt, en een **inertiemassa** m_{inert} , die bepaalt hoe sterk een object op een kracht reageert. In dat geval zou de bewegingsvergelijking worden:

$$F = m_{inert,1} \cdot a_1 = G \frac{m_{grav,1} \cdot m_{grav,2}}{r^2}$$

Wat leidt tot:

$$a_1 = G \frac{m_{grav,1} \cdot m_{grav,2}}{m_{inert,1} r^2}$$

Op het eerste gezicht is er geen reden waarom $m_{inert,1}$ precies gelijk zou moeten zijn aan $m_{grav,1}$. Toch blijkt uit talloze experimenten — waaronder de nauwkeurige torsiebalansmetingen van **Eötvös** in de 19e eeuw — dat deze twee massa's steeds exact gelijk zijn, binnen de grenzen van de meetnauwkeurigheid.

Een ander belangrijk verschil met de elektrische kracht is dat zwaartekracht **altijd aantrekkend** is: er bestaan geen positieve of negatieve massa's, zoals er wel positieve en negatieve ladingen bestaan in de elektromagnetische kracht.

Dankzij de experimenteel bevestigde gelijkheid $m_{grav} = m_{inert}$ vereenvoudigt de krachtvergelijking tot:

$$F = ma = G \frac{mM}{r^2}$$

waarbij M de massa van het aantrekkende lichaam is (bijvoorbeeld de Aarde) en m de massa van het testobject.

De bijbehorende versnelling a van het object met massa m wordt dan

$$a = G \frac{M}{r^2}$$

Opmerkelijk is dat de massa m van het vallende object wegvalt uit de vergelijking. Dit betekent dat alle objecten — ongeacht hun massa — dezelfde zwaartekrachtversnelling ondervinden, zolang externe invloeden zoals luchtweerstand worden verwaarloosd.

In tegenstelling tot elektrische krachten, waarbij de versnelling afhankelijk is van zowel de massa als de lading van het deeltje, is de zwaartekrachtversnelling dus **onafhankelijk van de massa van het testobject**. Dit is een fundamenteel resultaat dat mede ten grondslag ligt aan het **equivalentieprincipe** van Einstein.

2.1.2 Gedachte-experiment van Einstein

Geïnspireerd door deze observatie, stelde Einstein zich twee situaties voor:

1. Een persoon staat op de aarde en ervaart een zwaartekrachtsversnelling van $g = 9,81 \text{ m/s}^2$,
2. Diezelfde persoon bevindt zich in een afgesloten raket in de lege ruimte, die met dezelfde versnelling omhoog beweegt.

In beide gevallen voelt de persoon precies hetzelfde: een kracht die hem tegen de vloer drukt. Er is geen enkel lokaal fysisch experiment waarmee hij het verschil tussen deze twee situaties kan vaststellen. Dit leidde tot het **equivalentieprincipe**:

In een klein gebied zijn zwaartekracht en versnelling fysisch niet van elkaar te onderscheiden.

Dit principe impliceert dat wat wij als zwaartekracht ervaren, eigenlijk een gevolg is van het feit dat we ons in een versnellend stelsel bevinden. Volgens Einstein is zwaartekracht geen kracht in de klassieke zin, maar een uiting van het feit dat ruimte-tijd gekromd is

2.1.3 Invloed op licht

In de klassieke mechanica zouden massalose deeltjes, zoals fotonen, niet worden beïnvloed door zwaartekracht. De algemene relativiteitstheorie stelt echter dat massa's de ruimte-tijd vervormen, en dat alle objecten – zelfs licht – deze kromming volgen. Zwaartekracht beïnvloedt dus ook het pad van lichtstralen.

2.1.4 Experimentele bevestiging

In 1919 bevestigde Arthur Eddington dit effect tijdens een zonsverduistering. Hij observeerde dat sterren nabij de zon aan de hemel iets verschoven leken – precies zoals voorspeld door Einstein. De afleiding van dit effect volgt later in het hoofdstuk over de afbuiging van licht ([Experiment 3 - Afbuiging van Licht](#)).

2.1.5 Kernpunten en Intuïtie

- **Zwaartekracht versus andere krachten:** Terwijl krachten zoals de elektrische kracht afhankelijk zijn van de massa én de lading, blijkt zwaartekracht uniek omdat alle objecten - ongeacht hun massa - dezelfde versnelling ondervinden in een zwaartekrachtveld.
- **Gravitatie- en inertiemassa zijn gelijk:** Uit experimenten blijkt dat de massa die een zwaartekracht veroorzaakt (gravitiemassa) gelijk is aan de massa die reageert op een kracht (inertiemassa).
- **Versnelling onafhankelijk van massa:** Hierdoor vallen alle objecten met dezelfde versnelling, wat niet vanzelfsprekend is bij andere krachten.
- **Gedachte-experiment van Einstein:** Iemand in een lift op aarde ervaart hetzelfde als iemand in een versnellende raket in lege ruimte → lokale equivalentie tussen zwaartekracht en versnelling.
- **Gevolg:** Zwaartekracht wordt niet meer als *kracht* gezien, maar als een gevolg van de kromming van de ruimte-tijd.

Intuïtief

Stel je voor dat je in een afgesloten ruimte bent – een kamer zonder ramen, of een raket. Je voelt dat je tegen de vloer wordt gedrukt. Je weet echter niet of dat komt doordat je op aarde staat, of doordat de kamer met constante versnelling omhoog beweegt. Als er fysiek geen verschil is waarneembaar, dan *bestaat* dat verschil lokaal niet.

Volgens Einstein: zwaartekracht is niets anders dan het effect van bewegen in een gekromde ruimte-tijd.

Net zoals een bal op een trampoline vanzelf naar het diepste punt rolt zonder dat iemand duwt, zo beweegt elk object langs het pad dat de gekromde ruimte-tijd voorschrijft. Dat pad heet een **geodetische lijn**. Dit is het equivalent van een 'rechte lijn' in gekromde ruimte-tijd.

2.2 Kromming van Ruimte-Tijd

Om het belang van de overgang van het klassieke zwaartekrachtsmodel van Newton naar het geometrische model van Einstein te begrijpen, benaderen we het onderwerp eerst op een alternatieve, meer intuïtieve manier.

Stel een deeltje voor dat zich in de vrije ruimte bevindt, ver weg van massa's en zonder invloed van externe krachten. In zo'n situatie blijft het deeltje zich voortbewegen met constante snelheid en in een rechte lijn - een principe dat al rond 1600 werd beschreven door **Galileo Galilei**.

Wanneer we de ruimte-tijd voorstellen als opgebouwd uit rechthoekige rasterlijnen - een ruimtelijk referentiekader zonder kromming - dan beweegt het deeltje langs een rechte lijn door dit vlakke raster. Er is niets dat het doet afwijken van zijn initiële richting of snelheid.

Einstein stelde echter dat dit beeld verandert zodra een **grote massa** aanwezig is. Die massa vervormt de structuur van de ruimte-tijd, waardoor de "rechte" lijnen van het raster **gekromd** raken. In plaats van dat de zwaartekracht als een kracht optreedt, beweegt het deeltje **vanzelf** langs deze gekromde lijnen.

Hoe dichterbij de massa komt, hoe meer het pad afwijkt van zijn eerdere rechte lijn. Toch voelt het deeltje geen kracht: het beweegt vrij, maar volgt wel de kromming van de ruimte. Dit pad blijkt een soort "rechte lijn" binnen de kromming te zijn, en wordt later in dit document aangeduid als een **geodetische lijn**.

In de algemene relativiteitstheorie is er dus geen zwaartekracht zoals bij Newton, maar ontstaat het effect van zwaartekracht uit de geometrie van de ruimte-tijd zelf.

2.2.1 Van kracht naar geometrie

De uitdaging waar Einstein zich voor gesteld zag, was het vinden van een wiskundige beschrijving van deze kromming. Hij zocht een manier om de geometrie van de ruimte-tijd uit te drukken **als functie van massa en energie**, waarbij die beschrijving **onafhankelijk zou zijn van het gekozen coördinatenstelsel**.

Dit betekende dat hij een volledig **coördinatenonafhankelijke** formulering zocht, zodat de natuurwetten in elk stelsel dezelfde vorm behouden - een centraal principe in de algemene relativiteitstheorie.

De gevolgen van massa en energie op de geometrie zouden uiteindelijk worden vastgelegd in de zogenaamde **Einstein-veldvergelijkingen**. Deze vergelijkingen beschrijven hoe materie de ruimte-tijd kromt, en hoe die gekromde ruimte-tijd op zijn beurt bepaalt hoe materie zich beweegt.

In de komende hoofdstukken zullen we de denkrichting van Einstein stap voor stap volgen. Daarbij zullen we geleidelijk toewerken naar de afleiding van de veldvergelijkingen die de kern vormen van de algemene relativiteitstheorie.

2.2.2 Onafhankelijkheid van het Gekozen Coördinatenstelsel

Om de positie van een punt in de ruimte te bepalen, hebben we altijd een referentie nodig - een oorsprong waaruit we afstanden meten. Een gebruikelijke methode is het kiezen van een **Cartesiaans coördinatenstelsel**, met drie onderling loodrechte assen: de x-as, y-as en z-as.

We kunnen de locatie van een punt beschrijven met coördinaten (x, y, z) , waarbij deze waarden de afstanden voorstellen tot de oorsprong langs respectievelijk de x-, y- en z-as. De afstand van dat punt tot de oorsprong is dan, volgens de stelling van Pythagoras:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Wanneer we een ander coördinatenstelsel kiezen (met een andere oorsprong of rotatie), veranderen de coördinaatwaarden en dus ook s . Hoewel de coördinaten van afzonderlijke punten veranderen bij een transformatie, blijft de kleine afstand tussen twee dichtbijge punten — een differentieel element — invariant.

Deze differentiële afstand duiden we aan met:

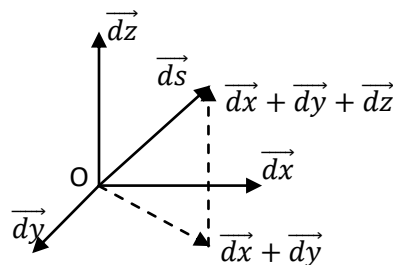
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Deze formule is toepasbaar in een orthogonaal, vlak, Cartesiaans stelsel. Maar om het algemener te maken - ook voor situaties waarin de assen niet noodzakelijk loodrecht staan - moeten we een meer fundamentele benadering gebruiken via vectoranalyse.

2.2.3 Vectorbenadering van afstand

We kunnen de differentiële afstand $\vec{ds}$ opvatten als de som van drie vectorcomponenten:

$$\vec{ds} = \vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz}$$



De grootte ds van de vector $\vec{ds}$ vinden we via het inwendig product $\vec{ds} \cdot \vec{ds}$:

$$ds^2 = \vec{ds} \cdot \vec{ds} = (\vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz}) \cdot (\vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz})$$

Ter herinnering: het inwendig product van twee vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ is:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\varphi)$$

waar φ de hoek is tussen de twee vectoren.

En dus

$$\vec{ds} \cdot \vec{ds} = ds^2 \cos(0) = ds^2$$

Voor het volledige inwendig product van $\vec{ds}$ krijgen we:

$$ds^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} + \vec{dx} \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \vec{dz} + \vec{dy} \cdot \vec{dx} + \vec{dy} \cdot \vec{dy} + \vec{dy} \cdot \vec{dz} + \vec{dz} \cdot \vec{dx} + \vec{dz} \cdot \vec{dy} + \vec{dz} \cdot \vec{dz}$$

In een **orthogonaal stelsel** verdwijnen de kruisproducten zoals $\vec{dx} \cdot \vec{dy}$, omdat de hoeken tussen de assen 90° zijn en $\cos(90^\circ) = 0$. In dat geval krijgen we eenvoudig:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

In een **niet-orthogonaal coördinatenstelsel** zijn de hoeken tussen de assen niet noodzakelijk 90° , waardoor ook de kruisproducten meetellen. De algemene vorm wordt dan:

$$ds^2 = g_{xx} dx^2 + g_{xy} dx dy + g_{xz} dx dz + g_{yx} dy dx + g_{yy} dy^2 + g_{yz} dy dz + g_{zx} dz dx + g_{zy} dz dy + g_{zz} dz^2 \quad (1)$$

De coëfficiënten g_{ij} geven informatie over de onderlinge oriëntatie van de assen, en vormen samen de **metrische tensor** g_{ij} .

2.2.4 Uitbreiding naar Ruimte-tijd

Einstein streefde naar een meer algemene formulering van de relativiteitstheorie, toepasbaar op een **vierdimensionaal coördinatenstelsel** dat bestaat uit één tijd-as en drie ruimte-assen. In deze ruimtetijd hoeven de assen niet noodzakelijk orthogonaal te zijn, en bovendien kan de **metriek** — de manier waarop afstanden worden gemeten — van punt tot punt verschillen.

De algemene uitdrukking voor het **kwadraat van het ruimte-tijd-interval** luidt dan:

$$ds^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

Waarin:

- $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$,
- $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$
- $g_{\mu\nu}$ de componenten zijn van de **vierdimensionale metrische tensor**.

Voor **dimensionele consistentie** moet de tijdscoördinaat dezelfde eenheid hebben als de ruimtelijke coördinaten. Daarom wordt de tijd t vermenigvuldigd met de lichtsnelheid c , zodat $x^0 = ct$ de eenheid meter krijgt.

In de **Einstein-notatie**, waarin automatisch wordt gesommeerd over herhaalde indices (de zogenaamde "dummy-indices"), vereenvoudigt deze uitdrukking tot:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

Deze metriek legt de structuur van de ruimte-tijd vast en bepaalt hoe afstanden, tijdsintervallen en causale relaties worden berekend in elk punt van het veld.

2.2.4.1 Uitwerking van de som

Wanneer we vergelijking (2) volledig uitschrijven voor alle waarden van μ en ν , krijgen we:

$$\begin{aligned} ds^2 = & g_{00}dx^0dx^0 + g_{01}dx^0dx^1 + g_{02}dx^0dx^2 + g_{03}dx^0dx^3 + \\ & g_{10}dx^1dx^0 + g_{11}dx^1dx^1 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{13}dx^1dx^3 + \\ & g_{20}dx^2dx^0 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}dx^2dx^2 + g_{23}dx^2dx^3 + \\ & g_{30}dx^3dx^0 + g_{31}dx^3dx^1 + g_{32}dx^3dx^2 + g_{33}dx^3dx^3 \end{aligned} \quad (3)$$

Dit is de vierdimensionale tegenhanger van vergelijking (1), die we eerder voor een driedimensionale ruimte opstelden. (Voor meer gedetailleerde informatie zie hoofdstuk [5](#))

2.2.4.2 Opmerking over symmetrie

De metrische tensor $g_{\mu\nu}$ is **symmetrisch**, wat betekent dat:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

Daarom bevat de tensor slechts 10 onafhankelijke componenten in plaats van 16. Dit maakt de tensor wiskundig elegant en praktisch hanteerbaar.

2.2.5 Kernpunten en Intuïtie

- De **afstand tussen twee infinitesimaal nabije punten** in ruimte-tijd wordt niet beïnvloed door de keuze van het coördinatenstelsel.
- In algemene relativiteit wordt deze afstand uitgedrukt via de **metrische tensor**, die rekening houdt met zowel kromming als niet-orthogonaliteit.
- **Vrije beweging in vlakke ruimte:** Een deeltje zonder invloed van krachten beweegt in een rechte lijn met constante snelheid (inertiebeweging).

- **Ruimte-tijd als geometrie:** In Einsteins visie vervormt massa de structuur van ruimte-tijd, waardoor 'rechte lijnen' (inertiebanen) gebogen worden.
- **Zwaartekracht = kromming:** In plaats van een kracht (zoals bij Newton), is zwaartekracht in de relativiteitstheorie het gevolg van de kromming van ruimte-tijd.
- **Geodeten (geodetische lijnen):** Objecten volgen in deze gekromde ruimte de kortste of 'rechtste' banen, ook al lijken die voor een externe waarnemer gebogen.
- **Einsteins uitdaging:** Ontwikkel een coördinaten-onafhankelijke wiskundige beschrijving van hoe massa ruimte-tijd vervormt → Einstein-veldvergelijkingen.

Voor een verdere verdieping in tensoren, metriek en hun toepassing op specifieke gevallen zoals de Schwarzschild-oplossing, verwijzen we naar **hoofdstuk 5**)

Intuïtie

Stel je voor:

- Een biljartbal rolt over een **gladde, vlakke tafel** - het beweegt in een rechte lijn.
- Leg je nu een zware metalen bol op een **rekbare rubberen mat** (zoals een trampoline), dan ontstaat er een **kromming**.
- Als je nu een kleinere bal op de mat laat rollen, zal die bal **afgebogen worden door de vervorming**, ook al duwt niemand erop.

Dat is zwaartekracht in Einsteins visie.

Volgens Newton is zwaartekracht een *kracht op afstand*. Volgens Einstein is er **geen kracht**: objecten bewegen in rechte lijnen, maar die rechte lijnen liggen op een **gekromd oppervlak**.

In deze zin wordt een vallende appel niet aangetrokken, maar volgt hij simpelweg de kortste route door een vervormde ruimte-tijd.

2.3 Covariante en Contravariante Vectoren en Duale Vectoren

In de algemene relativiteitstheorie komen de begrippen **contravariant** en **covariant** regelmatig voor. In deze sectie lichten we deze concepten toe en laten we zien hoe ze ontstaan uit de manier waarop vectoren en velden transformeren onder een verandering van coördinatenstelsel.

Zoals eerder besproken, moeten fysische grootheden - zoals vectoren, tensoren en velden - **onafhankelijk zijn van het gekozen coördinatenstelsel**. Bij een overgang naar een ander stelsel (bijvoorbeeld via rotatie of translatie) blijven de fysische eigenschappen behouden, maar de componenten ervan veranderen op een specifieke manier: ze **transformeren volgens welbepaalde regels**, afhankelijk van het type object (covariant of contravariant).

2.3.1 Scalaire grootheden, vectoren en velden

Een **scalaire grootheid**, zoals temperatuur, heeft op elke locatie een waarde maar geen richting. Een verzameling van scalars over de ruimte vormt een **scalair veld**.

Wanneer zo'n veld een richtingsafhankelijke verandering vertoont (bijvoorbeeld een temperatuurstijging in een bepaalde richting), kunnen we daarvan de afgeleide nemen. Deze afgeleide **gedraagt zich als een vector**, en in dit specifieke geval spreken we van een **duale vector**.

Een **duale vector** is afhankelijk van het gekozen coördinatenstelsel: bij een transformatie veranderen de componenten van de vector zó dat het geheel fysisch consistent blijft. Omdat deze componenten *mee transformeren* met het coördinatenstelsel, worden ze **covariant** genoemd.

Een "gewone" vector (zoals snelheid of versnelling) reageert juist anders: wanneer het coördinatenstelsel verandert, blijven de onderliggende vectoren fysiek hetzelfde, maar de componenten ervan veranderen in **tegengestelde richting** ten opzichte van de basisvectoren. Zulke vectoren worden **contravariant** genoemd.

2.3.1.1 Notatie en definities

Om onderscheid te maken tussen beide soorten vectoren, wordt conventioneel het volgende notatie gebruikt:

- Een **contravariante vector** heeft een **bovenindex**:

$$A^\mu$$

- Een **covariante vector** heeft een **onderindex**:

$$A_\mu$$

Deze zijn aan elkaar verbonden via de **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$ volgens de relatie:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

De contractie van een contravariante vector met zijn covariante tegenhanger levert een **scalaire invariant** op:

$$A_\mu A^\mu = I$$

Deze uitdrukking betekent dat het inwendig product van een vector met zijn duale (of 'verlaagde') versie resulteert in een grootheid I die **invariant blijft onder coördinatentransformaties**. Dit getal I kan geïnterpreteerd worden als de norm of het kwadraat van de afstand in ruimte-tijd, afhankelijk van het teken:

- Tijdachtig: $I < 0$
- Ruimteachtig: $I > 0$
- Lichtachtig: $I = 0$

Deze classificatie maakt duidelijk hoe de **metrische tensor** een sleutelrol speelt: zij bepaalt niet alleen hoe componenten van vectoren worden omgezet, maar ook hoe afstanden, lengtes en causale structuren in gekromde ruimte-tijd gedefinieerd zijn.

2.3.2 Transformaties tussen coördinatenstelsels

Stel dat we werken in een coördinatenstelsel met coördinaten x^m (waarbij $m = 0, 1, 2, 3$), en dat we overgaan naar een nieuw coördinatenstelsel met coördinaten y^n . De relatie tussen de twee stelsels wordt dan gegeven door:

$$y^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^0} x^0 + \frac{\partial y^n}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial y^n}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial y^n}{\partial x^3} x^3$$

In de Einstein-notatie, waarin automatisch wordt gesommeerd over herhaalde indices (van 0 tot 3), wordt dit:

$$y^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^m} x^m$$

2.3.2.1 Voorbeeld: afgeleide van een scalaire functie

Beschouw een scalaire functie φ . De differentiaal is:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} dx^m$$

Volledig uitgeschreven:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} dx^3$$

In het nieuwe coördinatenstelsel y^n gebruiken we de kettingregel om de componenten van de afgeleide te transformeren:

$$\frac{d\varphi}{dy^n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \frac{dx^m}{dy^n}$$

Hieruit volgt dat de componenten transformeren als:

$$A_n^{(y)} = \frac{dx^m}{dy^n} B_m^{(x)} \quad (1)$$

waarbij:

- $A_n^{(y)} = \frac{d\varphi}{dy^n}$: de covariante vector in het y -stelsel,
- $B_m^{(x)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^m}$: de covariante vector in het x -stelsel.

Dit is een **covariante transformatie**.

2.3.2.1.1 Volledig uitgeschreven (matrixvorm)

In matrixvorm wordt vergelijking (1):

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} \frac{dx^0}{dy^0} & \frac{dx^1}{dy^0} & \frac{dx^2}{dy^0} & \frac{dx^3}{dy^0} \\ \frac{dx^0}{dy^1} & \frac{dx^1}{dy^1} & \frac{dx^2}{dy^1} & \frac{dx^3}{dy^1} \\ \frac{dx^0}{dy^2} & \frac{dx^1}{dy^2} & \frac{dx^2}{dy^2} & \frac{dx^3}{dy^2} \\ \frac{dx^0}{dy^3} & \frac{dx^1}{dy^3} & \frac{dx^2}{dy^3} & \frac{dx^3}{dy^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_x$$

2.3.2.2 Contravariante transformatie

Voor contravariante vectoren is de transformatieformule juist omgekeerd:

$$W_{(y)}^n = \frac{dy^n}{dx^m} B_{(x)}^m$$

Volledig uitgeschreven in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} W^0 \\ W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} \frac{dy^0}{dx^0} & \frac{dy^0}{dx^1} & \frac{dy^0}{dx^2} & \frac{dy^0}{dx^3} \\ \frac{dy^1}{dx^0} & \frac{dy^1}{dx^1} & \frac{dy^1}{dx^2} & \frac{dy^1}{dx^3} \\ \frac{dy^2}{dx^0} & \frac{dy^2}{dx^1} & \frac{dy^2}{dx^2} & \frac{dy^2}{dx^3} \\ \frac{dy^3}{dx^0} & \frac{dy^3}{dx^1} & \frac{dy^3}{dx^2} & \frac{dy^3}{dx^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}_x$$

2.3.3 Transformatiegedrag van basisvectoren

In de tensorrekening is het belangrijk om niet alleen te begrijpen hoe de **componenten** van een vector veranderen bij coördinatentransformatie, maar ook hoe de bijbehorende **basisvectoren** zelf transformeren.

Bij een verandering van coördinatenstelsel van x^m naar y^n zijn de bijbehorende basisvectoren respectievelijk:

- $\vec{e}_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$
- $\vec{f}_n = \frac{\partial}{\partial y^n}$

De relatie tussen basisvectoren in verschillende coördinaten volgt uit de kettingregel van de differentiaalrekening:

$$\frac{\partial}{\partial x^m} = \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^n} \Rightarrow \vec{e}_m = \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \vec{f}_n$$

Hieruit volgt dat de **basisvectoren covariant transformeren**: ze veranderen **mee** met het coördinatensysteem. De componenten van contravariante vectoren moeten zich dus aanpassen in **tegengestelde richting** om het geheel fysisch invariant te houden.

2.3.3.1 Opmerking over Einstein-notatie

De **Einstein-notatie** maakt gebruik van herhaalde indices (zogenoeten *dummy-indices*), waarbij automatisch gesommeerd wordt over de waarden 0 tot en met 3:

$$A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu$$

In deze sectie zijn veel vergelijkingen bewust **expliciet uitgeschreven** om de betekenis van deze notatie te verduidelijken. In latere hoofdstukken zullen we vaker de ingekorte Einstein-notatie gebruiken voor compactheid.

2.3.4 Kernpunten en Intuïtie

- **Scalars versus vectoren:**
 - Een **scalaire grootte** (zoals temperatuur) verandert niet onder een coördinatentransformatie.
 - Een **vector** heeft zowel richting als grootte. De componenten van een vector veranderen wél onder transformatie, afhankelijk van de vectorsoort.
- **Contravariante vectoren** (zoals positie- of snelheidsvectoren W^n):
 - Transformeren **tegengesteld aan de basisvectoren** om de vector fysisch constant te houden.
 - Transformatieformule:

$$W_{(y)}^n = \frac{dy^n}{dx^m} B_{(x)}^m$$

- **Covariante vectoren** (zoals duale vectoren A_n):
 - Transformeren **mee met het coördinatenstelsel**.
 - Transformatieformule:

$$A_n^{(y)} = \frac{dx^m}{dy^n} B_m^{(x)}$$

- **Dualiteit:**

- Covariante vectoren zijn wiskundig gezien **lineaire functies op vectoren**; zij behoren tot de zogeheten **duale vectorruimte**.
- **Omzetten tussen covariant en contravariant:**
 - Met behulp van de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ kunnen we contravariante en covariante vectoren in elkaar omzetten:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad \text{en omgekeerd:} \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$$

Intuïtie

Stel je voor dat je op een heuvel staat en in verschillende richtingen de helling meet:

- Als je naar het noorden kijkt, zie je een stijging van bijvoorbeeld 10 meter per kilometer.
- Draai je nu je coördinatensysteem (bijvoorbeeld door een kompas te draaien), dan veranderen de getallen waarmee je die helling beschrijft — maar **de heuvel zelf verandert natuurlijk niet**.

Dit is precies de essentie van **tensortransformaties**:

De richting van een vector (bijvoorbeeld een helling of kracht) blijft fysisch gelijk, maar de **coördinaten waarin je die vector uitdrukt veranderen** met het stelsel.

- Bij **contravariante vectoren** (zoals positie of snelheid) veranderen de componenten **tegengesteld** aan de verandering van het coördinatenstelsel. Ze *corrigeren* als het ware voor de draaiing van de assen.
- Bij **covariante vectoren** (zoals de gradiënt van een scalair veld) veranderen de componenten **mee** met het nieuwe stelsel. Denk aan hoe de richting van een helling samenhangt met hoe je de ruimte opmeet.

De **metriek** fungeert als een soort *converter* tussen beide soorten vectoren. Je kunt de metriek zien als een liniaal die in elke richting **anders meet**, afhankelijk van de lokale kromming van de ruimte-tijd.

Vergelijkingstabel

<u>Eigenschap</u>	<u>Contravariant</u>	<u>Covariant</u>
Indexpositie	Boven A^μ	Onder A_μ
Transformeert...	Tegengesteld aan basis	Mee met basis
Voorbeeld	Positie, snelheid	Gradiënt, differentiaal
Oorsprong	Richting in ruimte	Richtingsafgeleide van een scalair veld

2.4 Covariante en Contravariante Transformaties van Tensoren

In de algemene relativiteitstheorie — en breder in de tensoranalyse — spelen **covariante**, **contravariante** en **gemengde tensoren** een centrale rol. De manier waarop deze tensoren transformeren onder een verandering

van coördinatenstelsel is essentieel om natuurkundige wetten **coördinatenonafhankelijk** te formuleren. In deze sectie bespreken we de transformatie-eigenschappen van de verschillende soorten tensoren.

De transformatieregels die hier worden behandeld vormen een directe uitbreiding van de regels voor vectoren uit de vorige sectie.

2.4.1 Covariante Tensoren

Een **covariante tensor** heeft één of meer onderindices, zoals T_{mn} en kan worden opgebouwd uit het product van covariante vectoren A_m en B_n

De transformatie van een covariante tensor van een coördinatenstelsel x naar een nieuw stelsel y verloopt als volgt:

$$T_{mn}^{(y)} = A_m^{(y)} B_n^{(y)} = \frac{dx^r}{dy^m} A_r^{(x)} \frac{dx^s}{dy^n} B_s^{(x)} = \frac{dx^r}{dy^m} \frac{dx^s}{dy^n} A_r^{(x)} B_s^{(x)} = \frac{dx^r}{dy^m} \frac{dx^s}{dy^n} T_{rs}^{(x)}$$

Het resultaat van de transformatie van T_{rs} naar T_{mn} wordt dan gegeven door:

$$T_{mn}^{(y)} = \frac{dx^r}{dy^m} \frac{dx^s}{dy^n} T_{rs}^{(x)}$$

Hierbij geldt:

- $T_{mn}^{(y)}$ de covariante tensor in het nieuwe coördinatenstelsel y ,
- De factoren $\frac{dx^r}{dy^m}$ en $\frac{dx^s}{dy^n}$ zijn de Jacobiaancomponenten van de transformatie van y naar x ,
- $T_{rs}^{(x)}$ is de oorspronkelijke covariante tensor in het oude stelsel.

2.4.2 Contravariante Tensoren

Een **contravariante tensor** heeft één of meer bovenindices, zoals T^{mn} , en kan worden opgebouwd uit contravariante vectoren A^m en B^n .

De transformatie is tegengesteld aan die van de covariante tensor:

$$T_{(y)}^{mn} = A_{(y)}^m B_{(y)}^n = \frac{dy^m}{dx^r} A_{(x)}^r \frac{dy^n}{dx^s} B_{(x)}^s = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dy^n}{dx^s} A_{(x)}^r B_{(x)}^s = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dy^n}{dx^s} T_{(x)}^{rs}$$

Het resultaat van de transformatie van T^{rs} naar T^{mn} wordt dan gegeven door:

$$T_{(y)}^{mn} = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dy^n}{dx^s} T_{(x)}^{rs}$$

Deze formule geeft aan hoe de componenten van een contravariante tensor zich aanpassen bij een verandering van basis.

2.4.3 Gemengde Tensoren

Een **gemengde tensor** bevat zowel boven- als onderindices, bijvoorbeeld T^m_n . Zo'n tensor kan bijvoorbeeld ontstaan uit het product van een contravariante vector A^m en een covariante vector B_n .

De bijbehorende transformatieformule luidt:

$$T^m_n(y) = A^m_{(y)} B_n^{(y)} = \frac{dy^m}{dx^r} A^r_{(x)} \frac{dx^s}{dy^n} B_s^{(x)} = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dx^s}{dy^n} A^r_{(x)} B_s^{(x)} = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dx^s}{dy^n} T^r_s(x)$$

Dus, de **transformatie** van een **gemengde tensor** is:

$$T^m_n(y) = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dx^s}{dy^n} T^r_s(x)$$

Deze mix van afgeleiden weerspiegelt het gecombineerde gedrag van de verschillende indexsoorten.

2.4.4 Kernpunten en Intuïtie

- Een **tensor** wordt gekenmerkt door zijn rang (aantal indices) en het type indices (boven of onder).
- Tensoren zijn de natuurlijke taal voor het formuleren van fysische wetten die onafhankelijk zijn van het gekozen coördinatenstelsel.
- De **transformatie-eigenschappen** van een tensor garanderen dat deze onder coördinatenverandering zijn betekenis behoudt.

Rang en Notatie

- Een **tensor van rang 0** is een **scalaire grootheid**, zoals temperatuur of massa. Deze verandert niet onder coördinatentransformaties.
- Een **vector** is een **tensor van rang 1**, en kan voorkomen in twee vormen:
 - **Contravariant**: genoteerd met een bovenindex, bijvoorbeeld V^m
 - **Covariant**: genoteerd met een onderindex, bijvoorbeeld V_m
- Een **tensor van rang 2** kent meerdere vormen:
 - **Volledig covariant**: $T_{\mu\nu}$,
 - **Volledig contravariant**: $T^{\mu\nu}$,
 - **Gemengd**: T^μ_ν , enz.

Transformatie-eigenschappen

Een tensor is gedefinieerd door de manier waarop zijn componenten transformeren onder een verandering van coördinatenstelsel. Deze transformatieregels zorgen ervoor dat de tensoren hun fysische betekenis behouden, ongeacht het gekozen stelsel:

- **Covariante componenten** (onderindices bijv. $T_{\mu\nu}$) transformeren met de afgeleide van de oude naar de nieuwe coördinaten.
- **Contravariante componenten** (bovenindices bijv. $T^{\mu\nu}$) transformeren met de afgeleide van de nieuwe naar de oude coördinaten.
- **Gemengde tensoren** combineren beide regels (bijv. T^μ_ν), afhankelijk van de plaats van de indices.

Een belangrijk voorbeeld is de **metrische tensor** $= g^{\mu\nu}$, waarmee we indices omhoog of omlaag kunnen brengen via:

$$T^\mu = g^{\mu\nu} T_\nu$$

Deze mogelijkheid tot indexmanipulatie maakt het eenvoudig om tussen covariante en contravariante beschrijvingen te wisselen.

Fysische Relevantie

De fundamentele vergelijkingen van de natuurkunde - zoals de Einstein-veldvergelijkingen in de algemene relativiteitstheorie - zijn geformuleerd in termen van tensoren. Hierdoor zijn zij **invariant onder coördinatentransformaties**, wat een essentieel kenmerk is van elke **covariante theorie**. Dit garandeert dat natuurkundige wetten dezelfde vorm behouden, ongeacht het gekozen coördinatenstelsel, en dat de onderliggende geometrie consistent beschreven blijft.

Intuïtief

Je kunt tensortransformaties vergelijken met het opnieuw intekenen van een kaart:

- Stel je een hoogtekartaat voor met heuvels, dalen en windrichtingen.
- Je draait de kaart 30°, maar de heuvels blijven waar ze zijn - **alleen de coördinaten waarin je ze beschrijft veranderen**.

Tensoren gedragen zich als **meetbare structuren in die wereld**:

- Een vector pijl op de kaart (bijv. windrichting) krijgt **nieuwe coördinaten** na de draai, zodat de **richting fysiek hetzelfde blijft**.
- Een gradiënt (bijv. de helling van het landschap) wijst nog steeds omhoog, maar je beschrijft die nu met **andere componenten** - afhankelijk van de nieuwe assen.

Zo gedragen tensoren zich onder transformaties: **hun geometrische of fysische betekenis blijft gelijk**, maar de componenten veranderen afhankelijk van het gekozen coördinatenstelsel.

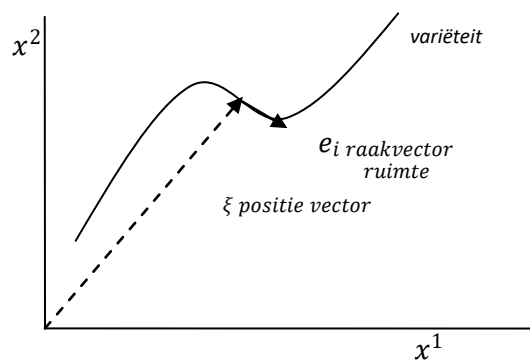
Overzicht van transformaties

<u>Tensorsoort</u>	<u>Indexnotatie</u>	<u>Transformeert als...</u>
Scalar	ϕ	Blijft gelijk
Contravariant vector	V^μ	$\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} V^\mu$
Covariant vector	V_μ	$\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} V_\mu$
Covariant tensor	$T_{\mu\nu}$	Twee keer de covariante regel
Contravariant tensor	$T^{\mu\nu}$	Twee keer de contravariante regel
Gemengde tensor	$T^\mu{}_\nu$	Mix van beide

2.5 Christoffel-symbool en de Covariante Afgeleide

Om zwaartekracht als een geometrisch fenomeen te beschrijven, moest Einstein een manier vinden om de **kromming van de ruimte-tijd** wiskundig vast te leggen. In plaats van krachten introduceert de algemene relativiteit een structuur op de ruimte-tijd zelf, waarin het **Christoffel-symbool** een centrale rol speelt. Dit symbool beschrijft hoe basisvectoren veranderen en ligt aan de basis van de **covariante afgeleide**, die nodig is om op consistente wijze te differentiëren in gekromde ruimte.

2.5.1 Basisdefinitie van het Christoffel-symbool



Beschouw een coördinatenstelsel x^i met een bijbehorende **positievector** $\vec{\xi}(x^i)$, uitgesproken als 'ksi', die een ruimtelijke variëteit representeert. We definiëren de basisvectoren in de raakruimte als de partiële afgeleiden van $\vec{\xi}$:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x^i}$$

De afgeleide van deze basisvector ten opzichte van een andere coördinaat x^j geeft aan hoe de richting van de basisvector verandert in de ruimte:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^i \partial x^j}$$

Deze tweede afgeleide kan worden uitgedrukt als een lineaire combinatie van de basisvectoren zelf:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k \quad (1)$$

Hierin is Γ_{ij}^k het **Christoffel-symbool van de tweede soort**. Dit object beschrijft hoe de basisvectoren veranderen, en daarmee de **kromming van de ruimte**. Als deze afgeleide nul is, verandert de richting van de basisvector niet en is de ruimte dan vlak.

2.5.1.1 Vectoriële Interpretatie van Richtingsverandering

De basisvectoren $\vec{e}_i$ behoren tot de **raakruimte** aan een punt van de variëteit. De afgeleide uit vergelijking (1) vertelt ons hoe deze basis verandert in de richting van x^j . Als $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} \neq 0$, is de ruimte **gekromd**.

Volledig uitgeschreven heeft de vergelijking (1) de vorm:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k = \Gamma_{ij}^0 \vec{e}_0 + \Gamma_{ij}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{ij}^2 \vec{e}_2 + \Gamma_{ij}^3 \vec{e}_3$$

(Vanaf hier laten we het vectorteken weg voor eenvoud.)

2.5.1.2 Afleiding van het Christoffel-symbool

Gebruikmakend van de **dualiteit van basisvectoren**, nemen we het inwendig product met de duale basisvector e^k :

$$e^k e_k = 1 \quad (2)$$

Door beide zijden van vergelijking (1) met e^k te vermenigvuldigen, verkrijgen we:

$$\Gamma_{ij}^k = e^k \left(\frac{\partial e_i}{\partial x^j} \right) \quad (3)$$

Dit geeft een directe definitie van het Christoffel-symbool.

2.5.1.3 Symmetrie van de onderste indices

Omdat in een gladde variëteit de volgorde van differentiëren niet uitmaakt (commutatief zijn), $(\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i)$, geldt:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \Rightarrow e^k \frac{\partial e_i}{\partial x^j} = e^k \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (4)$$

Het Christoffel-symbool is dus symmetrisch in de onderste indices $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

2.5.1.4 Afleiding via de coördinatentransformatie

Beschouw opnieuw:

$$e_k = \frac{\partial \xi}{\partial x^k} \Rightarrow e^k = \frac{1}{e_k} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi} \quad (5)$$

Substitutie in vergelijking (1) levert:

$$\Gamma_{ij}^k = e^k \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^i \partial x^j} \right) \quad (6)$$

Of, omgekeerd geschreven:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial x^k}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^i \partial x^j}$$

Deze uitdrukking laat zien dat het Christoffel-symbool is opgebouwd uit **tweede afgeleiden van de coördinaten**, en dus rechtstreeks verband houdt met de **geometrie van de ruimte-tijd**.

2.5.1.5 Koppeling aan de metrische tensor

De **metrische tensor** g_{ik} wordt gedefinieerd als het inwendig product van de basisvectoren:

$$g_{ik} = e_i \cdot e_k = (g^{ik})^{-1} \quad (7)$$

Met behulp van de inverse metriek g^{ik} kunnen we basisvectoren onderling omzetten:

$$\begin{aligned} e_i \cdot \frac{1}{e^k} &= (g^{ik})^{-1} \\ e^k &= g^{ik} e_i \end{aligned} \quad (8)$$

2.5.1.6 Samenvatting

- Het **Christoffel-symbool** Γ_{ij}^k beschrijft hoe basisvectoren veranderen in een gekromde ruimte.
- Het speelt een centrale rol in de definitie van de **covariante afgeleide**, die in het volgende hoofdstuk wordt besproken.

- De **symmetrie** $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ volgt uit de commutativiteit van partiële afgeleiden.
- Het Christoffel-symbool is zowel uitdrukbaar via **coördinaatafgeleiden** als via de **metrische tensor**, en is daarmee fundamenteel verbonden aan de structuur van ruimte-tijd.

2.5.2 Covariante Afgeleide

De **covariante afgeleide** is een uitbreiding van het concept van de gewone afgeleide in vlakke (Euclidische) ruimte. In de context van de algemene relativiteitstheorie moet deze afgeleide worden aangepast zodat ze geldig is in **gekromde ruimte-tijd**.

Einstein stelde als eis dat zijn theorie **covariant** moest zijn, wat betekent dat fysische wetten dezelfde vorm behouden in elk coördinatenstelsel. In het bijzonder moet gelden: als de afgeleide van een tensor nul is in één stelsel, dan moet dat ook zo zijn in elk ander coördinatenstelsel.

Om dit te garanderen, definiëren we de **covariante afgeleide** ∇ , die de gewone afgeleide corrigeert met extra termen. Deze afgeleide voldoet aan de eis:

$$\nabla g_{mn} = 0$$

Deze voorwaarde definieert de unieke torsievrije verbinding ∇ , die ook bekend staat als de **Levi-Civita-verbinding**.

2.5.2.1 Metriek en afgeleiden

We beginnen met de metrische tensor (7):

$$g_{mn} = e_m \cdot e_n \quad (9)$$

Neem de gewone afgeleide naar x^s :

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} = \frac{\partial (e_m \cdot e_n)}{\partial x^s} = e_m \frac{\partial e_n}{\partial x^s} + e_n \frac{\partial e_m}{\partial x^s} \quad (10)$$

Door de eerder afgeleide symmetrie (zie vergelijking 4), kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} &= e_m \frac{\partial e_n}{\partial x^s} + e_n \frac{\partial e_m}{\partial x^s} \\ \Rightarrow \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} &= e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} + e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} \end{aligned} \quad (11)$$

Brengen we deze termen over naar een kant van de vergelijking, dan krijgen we:

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} - e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} = 0 \quad (12)$$

2.5.2.2 Definitie van de covariante afgeleide

Deze relatie motiveert de definitie van de **covariante afgeleide van de metriek**:

$$\nabla_s g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} - e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} = 0 \quad (13)$$

We drukken de raakruimte-afgeleiden nu uit in termen van **Christoffel-symbolen**. Uit het vorige hoofdstuk weten we:

$$\Gamma_{sn}^t = e^t \frac{\partial e_s}{\partial x^n} \quad \text{en} \quad g_{mt} = e_m \cdot e_t$$

Daarmee wordt vergelijking (13):

$$\nabla_s g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} e^t e_t - e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} e^t e_t = 0 \quad (14)$$

Hier krijgen we de **covariante afgeleide** van de metrische tensor, uitgedrukt in de normale afgeleide, gecorrigeerd met twee termen die producten zijn van de metrische tensor en het bijbehorende Christoffel-symbool:

$$\nabla_s g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - g_{mt} \Gamma_{sn}^t - g_{nt} \Gamma_{sm}^t = 0 \quad (15)$$

2.5.2.3 Cyclische permutatie

Door dezelfde logica toe te passen op permutaties van de indices, krijgen we:

$$\nabla_m g_{ns} = \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - g_{nt} \Gamma_{ms}^t - g_{st} \Gamma_{mn}^t = 0 \quad (16)$$

$$\nabla_n g_{sm} = \frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} - g_{st} \Gamma_{nm}^t - g_{mt} \Gamma_{ns}^t = 0 \quad (17)$$

Nu voeren we de volgende operatie uit: (17) + (16) - (15), waarbij we rekening houden met de symmetrie zoals genoemd in vergelijking (4), dat $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, met als resultaat:

$$\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - 2g_{st} \Gamma_{nm}^t = 0 \quad (18)$$

$$g_{st} \Gamma_{nm}^t = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} \right) \quad (19)$$

2.5.2.4 Christoffel-symbool via metriek

We isoleren Γ_{nm}^t door met de inverse metriek g^{st} te vermenigvuldigen:

$$\Gamma_{nm}^t = \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} \right) \quad (20)$$

Deze uitdrukking geeft de **Christoffel-symbolen** als functie van de **metrische tensor en zijn eerste afgeleiden**.

2.5.2.5 Opmerkingen

2.5.2.5.1 Covariantie van de metriek

We bevestigen dat de covariante afgeleide van de metriek inderdaad nul is (zie vergelijking 8):

$$\nabla A_\mu = g_{\mu\nu} \nabla A^\nu \quad (20a)$$

Gebruikmakend van:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

en de Leibniz-regel (ketting regel):

$$\nabla A_\mu = \nabla(g_{\mu\nu} A^\nu) = g_{\mu\nu} \nabla A^\nu + A^\nu \nabla g_{\mu\nu} \quad (20b)$$

Zowel (20a) als (20b) moeten hetzelfde resultaat geven, dus:

$$g_{\mu\nu} \nabla A^\nu = g_{\mu\nu} \nabla A^\nu + A^\nu \nabla g_{\mu\nu}$$

Dan moet:

$$A^\nu \nabla g_{\mu\nu} = 0$$

Aangezien

$$A^\nu \neq 0 \text{ dan is } \nabla g_{\mu\nu} = 0$$

Hieruit volgt dat de **covariante afgeleide van de metriek nul is**, wat een fundamentele eigenschap is van de Levi-Civita-verbinding.

2.5.2.5.2 Transformatieregel van vectorcomponenten

Beschouw een vector:

$$\vec{V} = V^m \vec{e}_m$$

De component in de richting van de n -as is:

$$\begin{aligned} V_n &= \vec{V} \cdot \vec{e}_n \\ V_n &= V^m (\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) \end{aligned}$$

Zoals we weten:

$$g_{mn} = \vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = g_{nm}$$

Dus:

$$V_n = g_{nm} V^m \quad (20c)$$

Omgekeerd, via de inverse metriek:

$$g_{nm} = \frac{1}{g^{mn}}$$

$$V^m = g^{mn} V_n \quad (20d)$$

2.5.2.6 Covariante Afgeleide voor een Contravariante Vector

We willen nu de **covariante afgeleide** berekenen van een **contravariant vectorveld** V^m . In vlakke ruimte zou dit eenvoudigweg de gewone partiële afgeleide zijn. In een gekromde ruimte-tijd moeten we echter rekening houden met het feit dat de basisvectoren zelf ook kunnen variëren van punt tot punt.

2.5.2.6.1 Uitgangspunt: vector in componentvorm

We beschouwen de vector $\vec{V}$ als een lineaire combinatie van basisvectoren $\vec{e}_m$:

$$\vec{V} = V^m \vec{e}_m \quad (21)$$

De afgeleide van $\vec{V}$ naar een coördinaat x^l is:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} \vec{e}_m + V^m \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^l} \quad (22)$$

2.5.2.6.2 Koppeling met het Christoffel-symbool

Uit eerder werk (vergelijking 1) weten we dat de afgeleide van de basisvector wordt uitgedrukt via het **Christoffel-symbool**:

$$\frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^l} = \Gamma_{ml}^k \vec{e}_k \quad (23)$$

Substitutie in vergelijking (22) levert:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} \vec{e}_m + V^m \Gamma_{ml}^k \vec{e}_k \quad (24)$$

De som over de indices m en k maakt gebruik van de **Einstein-notatie**. We mogen de **dummy-indices** hernoemen (zie opmerking onderaan), en herschrijven de tweede term door $m \rightarrow \gamma$ en $k \rightarrow m$:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{l\gamma}^m \vec{e}_m$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \left(\frac{\partial V^m}{\partial x^l} + V^\gamma \Gamma_{l\gamma}^m \right) \vec{e}_m \quad (25)$$

2.5.2.6.3 Definitie van de covariante afgeleide

Hieruit volgt direct de definitie van de **covariante afgeleide** van de contravariante vector V^m ;

$$\nabla_l V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} + \Gamma_{ly}^m V^y \quad (26)$$

De extra term (met het Christoffel-symbool) corrigeert voor het feit dat de basisvectoren in een gekromde ruimte zelf veranderen. De covariante afgeleide $\nabla_l V^m$ is daardoor **tensorieel van aard** en transformeert correct onder coördinatenwisselingen.

2.5.2.6.4 Opmerking: dummy-indices

In de Einstein-notatie mogen we vrij kiezen hoe de **dummy-index** te benoemen, zolang deze index in het product wordt gesommeerd. Bijvoorbeeld:

$$V^\mu A_\mu = V^0 A_0 + V^1 A_1 + V^2 A_2 + V^3 A_3$$

Of we de index nu μ, γ of k noemen, maakt niets uit voor het eindresultaat. De index fungeert slechts als **plaatsvervanger** voor de sommatie over de dimensies.

2.5.2.6.5 Samengevat

- De covariante afgeleide van een contravariante vector V^m is:

$$\nabla_l V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} + \Gamma_{ly}^m V^y$$

- Deze formule corrigeert de gewone afgeleide met een term die de kromming van de ruimte-tijd weerspiegelt via het Christoffel-symbool.
- Het resultaat is een **tensor** van dezelfde rang als de originele vector.

2.5.2.7 Covariante Afgeleide voor een Covariante Vector

We bekijken nu hoe de **covariante afgeleide** werkt voor een **covariante vector** B_μ . We maken hierbij gebruik van het **scalaire product** van een contravariante vector A^μ en een covariante vector B_μ , en passen vervolgens de afgeleideregels toe.

2.5.2.7.1 Beginpunt: productregel op scalaire grootheid

Neem het scalaire product $A^\mu B_\mu$. De covariante afgeleide van dit product is

$$\nabla_\alpha (A^\mu B_\mu) = (\nabla_\alpha A^\mu) B_\mu + A^\mu (\nabla_\alpha B_\mu) \quad (27)$$

Substitueer de uitdrukking voor $\nabla_\alpha A^\mu$ uit eerder werk:

$$\nabla_\alpha A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\nu$$

Daarmee wordt vergelijking (27):

$$\nabla_{\alpha}(A^{\mu}B_{\mu}) = \left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu}A^{\nu}\right)B_{\mu} + A^{\mu}(\nabla_{\alpha}B_{\mu}) \quad (28)$$

2.5.2.7.2 Eigenschap van scalars

Omdat het scalaire product $A^{\mu}B_{\mu}$ een **scalar** is, is de covariante afgeleide gelijk aan de gewone afgeleide:

$$\nabla_{\alpha}(A^{\mu}B_{\mu}) = \frac{\partial(A^{\mu}B_{\mu})}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}B_{\mu} + A^{\mu}\frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \quad (29)$$

2.5.2.7.3 Vergelijking van beide uitdrukkingen

Door vergelijking van de rechterkanten van (28) en (29):

$$\cancel{\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}}B_{\mu} + A^{\mu}\frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \left(\cancel{\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu}A^{\nu}\right)B_{\mu} + A^{\mu}(\nabla_{\alpha}B_{\mu}) \quad (30)$$

Nu herschrijven we de indices in de tweede termen aan beide kanten om de vergelijking op te schonen.

Hernoem $\mu \rightarrow \sigma$ en $\nu \rightarrow \mu$ in de laatste term aan de rechterkant. Dan blijft over:

$$A^{\mu} \left[-\frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}B_{\sigma} + (\nabla_{\alpha}B_{\mu}) \right] = 0 \quad (31)$$

Omdat deze vergelijking voor elk A^{μ} moet gelden, volgt:

$$\nabla_{\alpha}B_{\mu} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}B_{\sigma} \quad (32)$$

2.5.2.7.4 Definitie

Dit is de **covariante afgeleide van een covariante vector** B_{μ} . De formule is analoog aan die van contravariante vectoren, maar het Christoffel-symbool komt nu met een **min**teken en met verwisselde indexpositie:

Voor V^m :

$$\nabla_l V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} + \Gamma_{ly}^m V^y$$

- Voor V^m : $\nabla_l V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} + \Gamma_{ly}^m V^y$
- Voor B_{μ} : $\nabla_{\alpha} B_{\mu} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} B_{\sigma}$

2.5.2.7.5 Samengevat

- De covariante afgeleide van een covariante vector B_{μ} is:

$$\nabla_{\alpha} B_{\mu} = \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} B_{\sigma}$$

- De tweede term corrigeert voor de verandering van de basisvectoren in een gekromde ruimte.
- Deze definitie zorgt ervoor dat de afgeleide transformeert als een tensor.

2.5.3 Relatie met Tensor

In dit hoofdstuk onderzoeken we hoe een **tensor**, opgebouwd uit de afgeleide van een covariante vector V_m , zich gedraagt onder een coördinatentransformatie. We laten zien dat de **gewone afgeleide** van een vector géén tensor oplevert, en dat de **covariante afgeleide** noodzakelijk is om een tensoriële relatie te behouden.

2.5.3.1 Transformatie van een afgeleide

Beschouw de volgende definitie van een tensor van rang 2 in het x-coördinatenstelsel:

$$T_{mn}(x) = \frac{\partial V_m(x)}{\partial x^n} \quad (33)$$

In een ander coördinatenstelsel y , schrijven we:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} \quad (34)$$

We onderzoeken nu of $T_{mn}(x)$ zich daadwerkelijk als een tensor gedraagt, d.w.z. of vergelijking (34) overeenkomt met de getransformeerde vorm van (33).

2.5.3.2 Verwachte tensortransformatie

De gebruikelijke **transformatieformule voor een covariante tensor** luidt:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial x^s}{\partial y^n} T_{rs}(x) \quad (35)$$

Substitueer nu $T_{rs}(x) = \frac{\partial V_r(x)}{\partial x^s}$:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial x^s}{\partial y^n} \frac{\partial V_r(x)}{\partial x^s} = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n} \quad (36)$$

Merk op dat:

$$\frac{\partial V_r(x)}{\partial x^s} = \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial y^n}{\partial x^s} \quad (\text{via de kettingregel})$$

Maar de vergelijking vereenvoudigt door direct te beschouwen:

$$T_{mn}(y) = \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} \quad (37)$$

We willen nu aantonen dat:

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} \neq T_{mn}(y) \quad ?$$

2.5.3.3 Berekening van $\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n}$

Gebruik de transformatie van vectorcomponenten:

$$V_m(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} V_r(x)$$

Dan is:

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y^n} \left(\frac{\partial x^r}{\partial y^m} V_r(x) \right)$$

Pas de productregel toe:

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} = \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^n \partial y^m} \cdot V_r(x) \quad (38)$$

Gebruik vervolgens de inverse transformatie:

$$V_r(x) = \frac{\partial y^a}{\partial x^r} V_a(y) \quad (39)$$

Ingevuld in (38):

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} = \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} + \frac{\partial y^a}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^n \partial y^m} \cdot V_a(y) \quad (40)$$

2.5.3.4 Koppeling met Christoffel-Symbolen

Herinner dat (zie eerdere afleiding van Christoffel-symbool):

$$\Gamma_{nm}^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^n \partial y^m} \quad (\text{uit 6})$$

Substitutie in (40) geeft:

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} = \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} + \Gamma_{nm}^a V_a(y)$$

Herordenen geeft:

$$\boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} = T_{mn}(y) = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^a V_a(y) \quad (41)$$

Dus:

$$T_{mn}(y) \neq \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n}$$

2.5.3.5 Covariante afgeleide van V_m

Volgens bovenstaande resultaat:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n} = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^a V_a(y)$$

En dat is exact de **covariante afgeleide van de covariante vector** V_m (zie [2.5.2.7.4](#)):

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^a V_a(y) = \nabla_n V_m(y)$$

$$\mathbf{T}_{mn}(\mathbf{y}) = \nabla_n \mathbf{V}_m(\mathbf{y}) \quad (42)$$

2.5.3.6 Conclusie

- De gewone afgeleide $\frac{\partial V_m(x)}{\partial x^n}$ is **géén tensor**.
- Pas na correctie met het **Christoffel-symbool** ontstaat een grootheid die zich onder coördinatentransformaties gedraagt als tensor.
- De correcte tensoriële versie is de **covariante afgeleide**:

$$\mathbf{T}_{mn} = \nabla_n \mathbf{V}_m$$

2.5.3.7 Covariante Differentiatie voor een Covariante Tensor

We breiden nu het begrip **covariante afgeleide** uit naar een **covariante tensor van rang 2**. De afleiding volgt direct uit de productregel voor tensoren en de eerder vastgestelde regels voor de covariante afgeleiden van vectoren.

2.5.3.7.1 Uitgangspunt

Beschouw een tensor $T_{\mu\nu}$, opgebouwd als het product van twee **covariante vectoren** A_μ en B_ν :

$$T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$$

We willen nu de **covariante afgeleide** nemen van deze tensor met betrekking tot x^α :

$$\nabla_\alpha T_{\mu\nu} = \nabla_\alpha (A_\mu B_\nu)$$

Volgens de productregel:

$$\nabla_\alpha T_{\mu\nu} = (\nabla_\alpha A_\mu) B_\nu + A_\mu (\nabla_\alpha B_\nu) \quad (a)$$

Gebruik nu de definitie van de covariante afgeleide van een covariante vector (zie hoofdstuk 2.5.2.2):

$$\nabla_\alpha A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta A_\beta$$

$$\nabla_{\alpha} B_{\nu} = \frac{\partial B_{\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} B_{\gamma}$$

Substitueer deze in (a):

$$\nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} = B_{\nu} \left\{ \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - A_{\beta} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} \right\} + A_{\mu} \left\{ \frac{\partial B_{\nu}}{\partial x^{\alpha}} - B_{\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} \right\}$$

Werk dit verder uit:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} &= B_{\nu} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - A_{\beta} B_{\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} + A_{\mu} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial x^{\alpha}} - A_{\mu} B_{\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} \\ \nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} &= B_{\nu} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + A_{\mu} \frac{\partial B_{\nu}}{\partial x^{\alpha}} - A_{\beta} B_{\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - A_{\mu} B_{\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} \\ \nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial (A_{\mu} B_{\nu})}{\partial x^{\alpha}} - A_{\beta} B_{\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - A_{\mu} B_{\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} \end{aligned}$$

2.5.3.7.2 Definitieve formule

Omdat $T_{\mu\nu} = A_{\mu} B_{\nu}$, krijgen we uiteindelijk:

$$\nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - T_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - T_{\mu\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} \quad (43)$$

2.5.3.7.3 Samenvatting

De **covariante afgeleide van een covariante tensor** $T_{\mu\nu}$ bestaat uit:

- de gewone afgeleide $\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}$,
- en twee **correctietermen** met Christoffel-symbolen, één voor elke index van de tensor.

Dit garandeert dat $\nabla_{\alpha} T_{\mu\nu}$ zich als een tensor gedraagt onder coördinatentransformaties.

2.5.3.8 Covariante Differentiatie voor een Contravariante Tensor

We breiden nu het concept van **covariante differentiatie** verder uit naar een **contravariante tensor van rang 2**. Deze tensor heeft twee bovenindices en transformeert anders dan een covariante tensor. We volgen opnieuw de productregel en passen de bekende covariante afgeleideformules toe.

2.5.3.8.1 Uitgangspunt

Beschouw een contravariante tensor $T^{\mu\nu}$ als het product van twee contravariante vectoren:

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$$

De covariante afgeleide van $T^{\mu\nu}$ met betrekking tot x^α is dan:

Nu covariant differentiëren van deze tensor:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = B^\nu \nabla_\alpha A^\mu + A^\mu \nabla_\alpha B^\nu \quad (a)$$

Gebruik nu de formule voor de covariante afgeleide van een contravariante vector (zie hoofdstuk [2.5.2.7.4](#)):

$$\nabla_\alpha A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu A^\beta$$

$$\nabla_\alpha B^\nu = \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu B^\gamma$$

Substitutie in (a) geeft:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = B^\nu \left\{ \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \right\} + A^\mu \left\{ \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu \right\}$$

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = B^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B^\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + A^\mu B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu$$

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = B^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\mu \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B^\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu$$

Herschrijf dit als:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = \frac{\partial (A^\mu B^\nu)}{\partial x^\alpha} + A^\beta B^\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu$$

2.5.3.8.2 Definitieve formule

Omdat $T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$, krijgen we:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + T^{\beta\nu} \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + T^{\mu\gamma} \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu \quad (44)$$

2.5.3.8.3 Samengevat

De **covariante afgeleide van een contravariante tensor $T^{\mu\nu}$** bestaat uit:

- de gewone afgeleide $\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}$,
- en twee **correctietermen** met Christoffel-symbolen, één voor elke bovenindex.

De volgorde van indices in het Christoffel-symbool is belangrijk: de **eerste index** (boven) geeft aan welke tensorindex wordt aangepast, de twee onderste zijn afkomstig uit de afgeleide.

2.5.3.9 Covariante Differentiatie voor een Gemengde Tensor

We bekijken nu hoe de **covariante afgeleide** wordt toegepast op een **gemengde tensor** - een tensor die zowel een **contravariante** als een **covariante** index heeft.

2.5.3.9.1 Uitgangspunt

Beschouw de gemengde tensor T_ν^μ , gedefinieerd als het product van een contravariante vector A^μ en een covariante vector B_ν :

$$T_\nu^\mu = A^\mu B_\nu$$

De covariante afgeleide van T_ν^μ ten opzichte van x^α is:

$$\nabla_\alpha T_\nu^\mu = B_\nu \nabla_\alpha A^\mu + A^\mu \nabla_\alpha B_\nu \quad (a)$$

2.5.3.9.2 Gebruik van covariante afgeleiden

Vervang de afgeleiden door hun bekende expressies:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha A^\mu &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu A^\beta \\ \nabla_\alpha B_\nu &= \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma B_\gamma \end{aligned}$$

Substitueer deze in (a):

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T_\nu^\mu &= B_\nu \left\{ \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \right\} + A^\mu \left\{ \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} - B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \right\} \\ \nabla_\alpha T_\nu^\mu &= B_\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B_\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} - A^\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \\ \nabla_\alpha T_\nu^\mu &= B_\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\mu \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B_\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - A^\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \end{aligned}$$

Herschrijf dit tot:

$$\nabla_\alpha T_\nu^\mu = \frac{\partial (A^\mu B_\nu)}{\partial x^\alpha} + A^\beta B_\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - A^\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma$$

2.5.3.9.3 Definitieve formule

Omdat $T_\nu^\mu = A^\mu B_\nu$, volgt:

$$\nabla_\alpha T_\nu^\mu = \frac{\partial T_\nu^\mu}{\partial x^\alpha} + T_\nu^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - T_\gamma^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \quad (45)$$

2.5.4 Kernpunten en Intuïtie

- **Christoffel-symbolen** $\Gamma_{\mu\nu}^{\mu}$ beschrijven hoe de basisvectoren veranderen van punt tot punt in gekromde ruimte; zij zijn opgebouwd uit de metriek en haar afgeleiden en zijn zelf geen tensor.
- In vlakke ruimte zijn alle $\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = 0$, in gekromde ruimte niet, en dat verschil bepaalt o.a. paralleltransport en geodeten.
- De **covariante afgeleide** corrigeert de gewone afgeleide met termen in $\Gamma_{\mu\nu}^{\mu}$, zodat het resultaat zich als een tensor gedraagt.
- De **Levi-Civita-verbinding** is torsievrij en metrisch compatibel ($\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$), en daarmee uniek.

Intuïtief

Denk aan lopen op een bol met een pijl in je hand: op een vlak vlak blijft de pijl in dezelfde richting wijzen, op een bol draait hij ten opzichte van het oppervlak. Die “onvermijdelijke” draai wordt gemeten door de Christoffel-symbolen; de covariante afgeleide corrigeert voor deze draai zodat “recht vooruit” in gekromde geometrie betekenis houdt.

Samenvattend overzicht:

<u>Concept</u>	<u>Betekenis</u>
Γ_{ij}^k	Compensatieterm bij differentiatie in gekromde ruimte
Covariante afgeleide	Afgeleide die “coördinaat-vrij” en tensorieel is
$\nabla_g V^i$	Gewone afgeleide + correctie via Γ_{jk}^i
Geometrische betekenis	Paralleltransport, kromming, en richtingsverandering in gekromde ruimte

2.6 Geodetische Vergelijking en Christoffel-symbolen

Zoals eerder besproken, trachtte Einstein de **geometrie van ruimte-tijd** zó te formuleren dat een vrij vallend object geen zwaartekracht ervaart, maar in plaats daarvan een “rechte lijn” volgt in een gekromde ruimte-tijd. Zo'n pad wordt een **geodeet** genoemd.

In deze context is de **versnelling van de vierpositie** van het object gelijk aan nul. In lokale vrije val volgt het object dus:

$$\frac{d^2 \xi^{\alpha}}{d\tau^2} = 0 \text{ met } ds = c d\tau$$

Hierbij is τ de **eigentijd** (proper time), gemeten door een waarnemer die zich in een vrij vallend coördinatenstelsel bevindt. De oorsprong van dit stelsel “geeft zich over” aan de zwaartekracht en volgt exact

het pad van het vrij vallende object. Een geodetische lijn is de kortste route (in eigen tijd) tussen twee punten, gegeven een bepaalde ruimte-tijdmetriek.

2.6.1 Toelichting bij de termen

2.6.1.1 Lokale (vrij vallende) stelsel (ξ^α):

Dit is een coördinatensysteem dat lokaal in de ruimtetijd gedefinieerd wordt.

Het is "vrij vallend" omdat de assen van dit stelsel zich gedragen als een deeltje in vrije val, wat betekent dat er op dat moment geen niet-gravitationele krachten op inwerken.

Op een zeer kleine schaal (en bij benadering) kunnen de wetten van de fysica in dit systeem vereenvoudigd worden, vergelijkbaar met de lokale wetten in een inertiaal (rechtlijnige, constante snelheid) frame.

2.6.1.2 Algemeen gekromd coördinatenstelsel (x^μ):

Dit is een wereldwijd coördinatensysteem dat de gehele ruimtetijd beschrijft, die over het algemeen gekromd is door massa en energie.

De coördinaten x^μ kunnen willekeurige coördinaten zijn die gebruikt worden om punten in een gekromde ruimtetijd te specificeren, zonder beperking tot een lokaal inertiaal frame.

2.6.1.3 De relatie tussen de twee

De stelling stelt dat er een lokale transformatie bestaat tussen deze twee stelsels, vergelijkbaar met een Lorentz-transformatie, die de relatie tussen de lokale vrij vallende coördinaten ξ^α en de algemene coördinaten x^μ definieert.

2.6.1.4 Betekenis in de fysica

In de **algemene relativiteitstheorie** beschrijft dit concept dat je in een gekromde ruimtetijd altijd een lokaal "vlak" coördinatensysteem kunt definiëren op elk punt.

In dit lokale, "vrije val"-stelsel, lijken de natuurwetten altijd op dezelfde manier te werken als in een speciaal relativistisch, inertiaal stelsel, wat de lokale fysica vereenvoudigt.

Dit is cruciaal voor het begrijpen van de lokale effecten van zwaartekracht: de zwaartekracht is de manifestatie van de kromming van de ruimtetijd zelf, en in een lokaal vrij vallend stelsel kan men deze kromming negeren.

2.6.1.5 Afleiding via coördinatentransformatie

Stel dat ξ^α de coördinaten zijn in het lokale (vrij vallende) stelsel, terwijl x^μ de coördinaten zijn in een algemeen gekromd coördinatenstelsel. Dan geldt:

$$\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} x^\mu$$

De eerste afgeleide wordt:

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

De tweede afgeleide:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \right) \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \\ \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \right) \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \\ \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} &= \frac{d^2 \xi^\alpha}{dx^\mu dx^\nu} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \end{aligned}$$

Omdat $\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$ voor een vrij vallend object, volgt:

$$0 = \frac{d^2 \xi^\alpha}{dx^\mu dx^\nu} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Om terug te keren naar de x-coördinaten, vermenigvuldigen we beide zijden met $\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}$:

$$0 = \frac{dx^\beta}{d\xi^\alpha} \cdot \frac{d^2 \xi^\alpha}{dx^\mu dx^\nu} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \cdot \frac{dx^\beta}{d\xi^\alpha}$$

Hier geldt:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta \quad (\text{de Kronecker delta})$$

Dus:

$$0 = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\nu}{d\tau} + \delta_\mu^\beta \cdot \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

De **Kronecker delta** is gedefinieerd als 1 alleen wanneer $\beta = \mu$, en 0 als $\beta \neq \mu$.

$\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta = 0$, omdat x^β en x^μ loodrecht op elkaar staan in het geval $\beta \neq \mu$. Vanwege de Einstein notatie bestaat de meest rechtse term uit vier elementen, hierbij is dus $\delta_\mu^\beta = 1$ bij $\mu = \beta$, terwijl de overige drie termen nul zijn. Dit betekent dat we de μ index, in de laatste term, kunnen vervangen door β .

Dus:

$$0 = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} + \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$$

Herken hierin het **Christoffel-symbool**:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Daarmee krijgen we de **geodetische vergelijking**:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = 0 \quad (1)$$

2.6.2 Resultaat en Interpretatie

De tweede afgeleide $\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$ wordt dus gecompenseerd door de door de **Christoffel-term**. Wanneer er **geen zwaartekracht** is (dus vlakke ruimte-tijd), zijn alle $\Gamma_{\mu\nu}^\beta = 0$, en volgt het object een rechte lijn:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = 0$$

De geodetische vergelijking beschrijft het pad van een vrij vallend deeltje in gekromde ruimte-tijd, d.w.z. het pad met de kortste afstand in de 4D-ruimte-tijd.

De relatie tussen versnelling in het lokale vrije-valstelsel en in het algemene coördinatenstelsel is:

$$\frac{d^2 \xi^\beta}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}$$

Voor een object op een **geodetische baan** is de versnelling in het lokale stelsel nul:

$$0 = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}$$

Of, anders geschreven:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}$$

Waarbij het **Christoffel-symbool** de relatie bevat tussen het bewegende stelsel ξ^α en het “rust” stelsel x^β .

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Opmerking 1: Affiene parameter

Voor massalose deeltjes zoals fotonen is $\tau = 0$, waardoor gebruik van de eigentijd niet geschikt is. Daarom gebruiken we een **affiene parameter** λ , zodat de geodetische vergelijking wordt:

$$0 = \frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda}$$

De parameter λ verdwijnt vaak in de uiteindelijke fysische uitdrukkingen, wat het gebruik vergemakkelijkt.

Opmerking 2: Lichtsneldheid c

In veel literatuur wordt $c = 1$ gekozen voor eenvoud. In dit document behouden we echter **de lichtsnelheid c** expliciet in de formules. Dit maakt het makkelijker om de **dimensies** te controleren en vergroot de transparantie van de berekeningen.

2.6.3 Kernpunten en Intuïtie

- **Geodeten** zijn de "rechtste" mogelijke lijnen in een gekromde ruimte-tijd - denk aan de kortste route tussen twee punten op een bol.
- In de algemene relativiteit beschrijven geodeten het pad dat een **vrij bewegend deeltje** volgt onder invloed van zwaartekracht (maar zonder andere krachten).
- De **geodetische vergelijking** luidt:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

- Dit is een tweede-orde differentiaalvergelijking die het traject bepaalt in termen van de Christoffel-symbolen $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$.
- De vergelijking toont dat de kromming van de ruimte-tijd (via Γ) de **versnelling van het pad bepaalt**, zonder externe kracht.

Intuïtief

Stel je voor dat je een pijl over een bol laat rollen zonder hem aan te raken:

- De pijl volgt de "rechtste" lijn op de bol - dat is geen rechte lijn in de gebruikelijke zin, maar een **grote cirkel** zoals de evenaar of een meridiaan.
- Dat pad noemen we een **geodeet**.

In de relativiteitstheorie:

- Als je een appel laat vallen, volgt die niet een kromme door een kracht, maar een geodeet in een gekromde ruimte-tijd - **de kromming van de aarde bepaalt de baan**.
- De **Christoffel-symbolen** in de vergelijking vertellen hoe het pad "afwijkt van rechtdoor", afhankelijk van de geometrie.

Denk aan een GPS die zijn eigen koers aanpast afhankelijk van de bochten in het landschap. Die "correctie" is de rol van $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$.

Tabeloverzicht:

Grootheid	Betekenis
$x^\mu(\tau)$	Coördinaten van het deeltje als functie van eigen tijd
$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$	Versnelling langs de wereldlijn
$\Gamma_{\nu\rho}^\mu$	“Afbuigcoëfficiënt” door ruimte-tijkromming
Geodetische vergelijking	Pad zonder externe krachten: zuivere gravitatie

2.7 Christoffel-symbolen uitgedrukt in termen van de Metrische Tensor

Zoals eerder besproken, bevat de **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$ alle informatie over de kromming en geometrie van de ruimte-tijd. In dit hoofdstuk zullen we aantonen hoe het **Christoffel-symbool** $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ kan worden uitgedrukt **uitsluitend in termen van de metrische tensor en haar afgeleiden**.

2.7.1 Voorwaarden en definities

We vertrekken vanuit de volgende standaardvormen:

- **Metrische tensor (vanuit de lokale vlakke ruimte):**

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

waarbij $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ de Minkowski-metrik is (zie ook hoofdstuk [5.6.1](#)).

- Christoffel-symbool (via transformatie):

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

2.7.2 Omvorming via kettingregel

We beginnen met het herschrijven van de metrische tensor in een iets andere vorm $g_{\alpha\mu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \text{ vanwege symmetrie} \Rightarrow g_{\nu\mu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Door de fictieve index α te vervangen door σ :

$$\sigma \Rightarrow g_{\nu\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Door de index ν te vervangen door α :

$$\alpha \Rightarrow g_{\alpha\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \quad (2)$$

Nu herschrijven we het Christoffel-symbool door elk deel van de vergelijking te vermenigvuldigen met de partiële afgeleide van ξ^σ ten opzichte van x^β :

$$\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (3a)$$

Of:

$$\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \xi^\lambda} = \delta_\lambda^\sigma \text{ of } \delta_\lambda^\sigma \{ = 1 \text{ als } \sigma = \lambda \text{ en } = 0 \text{ als } \sigma \neq \lambda \}$$

Dus samen met (3a) wordt dit:

$$\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \delta_\lambda^\sigma \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Als $\sigma = \lambda$ dan vervangen we λ door σ :

$$\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (3b)$$

Dus uit (2):

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\alpha}$$

Met (3b) kunnen we afleiden:

$$\frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \text{ en } \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

Nu herschrijven we de partiële afgeleide van $g_{\alpha\mu}$ met betrekking tot x^ν als volgt:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

We weten van hierboven:

$$\text{metrische tensor: } g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Dus:

$$\eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} = g_{\rho\alpha} \text{ en } \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} = g_{\mu\rho}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \quad (3c)$$

Voer cyclische permutaties uit:

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \quad \mu \text{ en } \nu \text{ zijn verwisseld} \quad (3d)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \quad \alpha \text{ en } \mu \text{ zijn verwisseld} \quad (3e)$$

Neem nu (3c)+(3d)-(3e) uit:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \textcolor{red}{g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho} + g_{\rho\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\rho + \textcolor{green}{g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho} - \textcolor{red}{g_{\rho\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho} - \textcolor{green}{g_{\nu\rho} \Gamma_{\alpha\mu}^\rho}$$

Door symmetrie in de indices vereenvoudigt dit tot:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} &= 2g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \\ g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \end{aligned}$$

Isoleren van het Christoffel-symbool

De laatste stap bestaat erin beide zijden van de vergelijking te vermenigvuldigen met de inverse metrische tensor $g^{\rho\alpha}$ om zo het Christoffel-symbool te vinden:

$$g^{\rho\alpha} g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Verwisselen van ρ naar β :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Gewoonlijk wordt de volgende conventie aangenomen voor het schrijven van partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \equiv g_{\alpha\mu,\nu}$$

Dus, het **Christoffel-symbool** in compacte notatie:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})$$

2.7.3 Samenvatting

De **Christoffel-symbolen** zijn volledig uitgedrukt in termen van de **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$ en haar **eerste afgeleiden**:

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)}$$

Of in korte notatie:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})$$

2.7.4 Kernpunten en Intuïtie

Deze vergelijking is fundamenteel in de algemene relativiteitstheorie. Ze toont aan dat **de geometrie van ruimte-tijd**, en daarmee de zwaartekracht, volledig wordt bepaald door de metriek. De Christoffel-symbolen beschrijven hoe vectoren veranderen onder paralleltransport en verschijnen in de geodetische vergelijking, de covariante afgeleide, en later in de Riemann- en Ricci-tensor.

- **Christoffel-symbolen** $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ zijn volledig te berekenen op basis van de **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$.
- De expliciete formule luidt:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu})$$

- De Christoffel-symbolen geven aan hoe coördinaatsystemen lokaal gekromd zijn - en dus hoe vectoren en banen zich gedragen.
- De **symmetrie** $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ blijft behouden zolang de metriek symmetrisch is (wat altijd zo is).
- Deze relatie vormt de **brug tussen geometrie en dynamica** in de algemene relativiteit.

Intuïtief

De **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$ vertelt je hoe je afstanden meet in een ruimte (bijv. hoe "ver" iets is in gekromde coördinaten).

Maar: als je in een landschap beweegt en je wilt weten **hoe de richting van een pijl verandert als je vooruitgaat**, dan heb je meer nodig dan alleen afstanden: je moet weten **hoe de meetlatten zelf veranderen**. Dat is precies wat de **Christoffel-symbolen** doen.

Je kunt het zo zien:

- De **metriek** vertelt je *wat recht is op een punt*.
- De **Christoffel-symbolen** vertellen je *hoe 'recht' verandert als je beweegt*.

Je hoeft de verandering van basisvectoren niet apart op te meten - je kunt hem **volledig uitrekenen uit de metriek zelf!**

Tabeloverzicht:

<u>Grootheid</u>	<u>Betekenis</u>
$g_{\mu\nu}$	Bepaalt lokale afstand en hoek
$\partial_\sigma g_{\mu\nu}$	Hoe de afstandsdefinitie verandert als je beweegt
$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$	Hoe basisvectoren veranderen - bepaalt afwijking van "rechtdoor"
Formule	Afgeleiden van metriek omgezet met inverse metriek

2.8 Geodetische Vergelijking en haar Newtoniaanse Limiet

De Newtoniaanse zwaartekracht beschrijft hoe materie een zwaartekrachtspotentiaal Φ genereert, en hoe, volgens de tweede wet van Newton, die potentiaal leidt tot een versnelling:

$$\vec{a} = -\nabla\Phi$$

Hier is Φ de zwaartekrachtspotentiaal, en ∇ is de Euclidische gradiëntoperator

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right)$$

Hier zijn $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ de eenheidsvectoren langs de respectievelijke assen. Deze beschrijving is accuraat bij lage snelheden, zwakke velden en in een statisch regime. We gaan nu laten zien dat de geodetische vergelijking van de algemene relativiteitstheorie in deze limiet reduceert tot de Newtoniaanse zwaartekrachtvergelijking.

2.8.1 Aannames voor de Newtoniaanse limiet:

- Het deeltje beweegt langzaam vergeleken met de lichtsnelheid.
- Het zwaartekrachtsveld is zwak.
- Het veld is statisch, dus het verandert niet met de tijd.

2.8.2 Startpunt: de geodetische vergelijking

De geodetische vergelijking beschrijft de wereldlijn van een deeltje dat alleen door zwaartekracht wordt beïnvloed. We zullen nu laten zien dat in de context van de Newtoniaanse limiet de geodetische vergelijking reduceert tot de zwaartekrachtvergelijking van Newton.

Uit het vorige hoofdstuk weten we dat de geodetische vergelijkingen, met de eigen tijd als parameter van de wereldlijn, als volgt zijn:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = 0$$

De tweede term omvat een som over μ en ν over alle indices, wat neerkomt op 16 termen. Omdat het deeltje zeer langzaam beweegt ten opzichte van de lichtsnelheid, domineert de tijdcomponent, d.w.z. de 0^e component van de vector van het deeltje, de andere ruimtelijke componenten. We komen dan tot de volgende benadering:

$$\text{met } \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad (\text{aangezien we weten dat } c\partial t = \partial x^0)$$

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = 0$$

De enige term die na benadering overblijft, is de tijdcomponent waarbij dus Γ_{00}^i en $\mu = \nu = 0$. Dit geeft:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\beta \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Voor de beschrijving van de vierdimensionale ruimte-tijd worden normaal gesproken Griekse letters gebruikt voor de indices, maar wanneer alleen de driedimensionale ruimte wordt beschouwd, is het gebruikelijk om Latijnse letters te gebruiken. Daarom wordt β vervangen door i ($i = x, y, z$), resulterend in:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

2.8.3 Benadering van het Christoffel-symbool

Uit hoofdstuk [Christoffel-symbolen uitgedrukt in termen van de Metrische Tensor \(2.7\)](#), blijkt dat het Christoffel-symbool kan worden berekend met betrekking tot de componenten van een gegeven metriek (waarbij $x^0 \equiv \tau$):

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \right)$$

Omdat het veld statisch is, is, volgens de tweede aanname van de Newtoniaanse limiet, de tijdsafgeleide $\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} = 0$, zo dat het Christoffel-symbool kan worden vereenvoudigd tot:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \quad (2)$$

2.8.4 Zwak-veldbenadering

Als het zwaartekrachtsveld zwak genoeg is, zal ruimte-tijd slechts licht vervormd worden ten opzichte van de zwaartekrachtvrije Minkowski-ruimte-tijd van de Speciale Relativiteitstheorie. Dan kan de ruimte-tijd metriek worden beschouwd als een kleine verstoring van de Minkowski-metriek $\eta_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{met } [h_{\mu\nu}] \ll 1$$

$$\frac{d g_{00}}{dx^j} = \frac{d(\eta_{00} + h_{00})}{dx^j}$$

$$\frac{d g_{00}}{dx^j} = \frac{d\eta_{00}}{dx^j} + \frac{d h_{00}}{dx^j} = 0 + \frac{d h_{00}}{dx^j} \quad \text{als } \eta_{00} = 1$$

Voor g_{00} geldt dan:

$$\frac{d g_{00}}{d x^j} = \frac{d h_{00}}{d x^j} \quad (3)$$

Dus uit (2) en (3) wordt vergelijking (1):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d \tau^2} &= -\Gamma_{00}^i \left(\frac{c d t}{d \tau} \right)^2 \\ \frac{d^2 x^i}{d \tau^2} &= \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \left(\frac{c d t}{d \tau} \right)^2 \end{aligned}$$

Door $g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij}$ te definiëren, vinden we dat $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu$, wat overeenkomt met de eerste orde van h_{ij} , bij het definiëren van een inverse metriek.

We verkrijgen dan:

$$\frac{d^2 x^i}{d \tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{ij} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \left(\frac{c d t}{d \tau} \right)^2$$

Maar aangezien η^{ij} niet nul is voor $j=i$, dan is $\eta^{ii} = -1$ (waarbij i verwijst naar de ruimtelijke componenten) geldt:

$$\frac{d^2 x^i}{d \tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{c d t}{d \tau} \right)^2$$

We zullen nu de afgeleide aan de linkerkant van τ naar t veranderen, dit gebeurt als volgt:

Eerst wordt in de bovenstaande vergelijking, i door 0 vervangen, waarbij dus $x^0 = t$:

$$c^2 \frac{d^2 t}{d \tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial t} \left(\frac{c d t}{d \tau} \right)^2$$

Aangezien het zwaartekrachtsveld constant is, geldt $\frac{\partial h_{00}}{\partial t} = 0$:

$$c^2 \frac{d^2 t}{d \tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 t}{d \tau^2} = 0 \quad (4)$$

2.8.5 Overschakelen naar coördinaattijd

Vervolgens bewerken we de partiële afgeleiden met betrekking tot tau (τ):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d \tau^2} &= \frac{d}{d \tau} \frac{d x^i}{d \tau} = \frac{d}{d \tau} \left(\frac{d t}{d \tau} \frac{d x^i}{d t} \right) \\ &= \frac{d t}{d \tau} \left(\frac{d}{d \tau} \frac{d x^i}{d t} \right) + \frac{d x^i}{d t} \left(\frac{d}{d \tau} \frac{d t}{d \tau} \right) \\ &= \frac{d t}{d \tau} \left(\frac{d t}{d \tau} \frac{d}{d t} \frac{d x^i}{d t} \right) + \frac{d x^i}{d t} \left(\frac{d}{d \tau} \frac{d t}{d \tau} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2}\right) + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}\right)$$

Zoals we hierboven in (4) hebben gezien, is $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \\ &\Rightarrow \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2}\right) \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

In het algemeen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} i + \frac{d^2 y}{dt^2} j + \frac{d^2 z}{dt^2} k &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2 h_{00}}{2}\right) i - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c^2 h_{00}}{2}\right) j - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c^2 h_{00}}{2}\right) k \\ \frac{d^2 x}{dt^2} i + \frac{d^2 y}{dt^2} j + \frac{d^2 z}{dt^2} k &= -\left[\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right] \left(\frac{c^2 h_{00}}{2}\right) = -\nabla \left(\frac{c^2 h_{00}}{2}\right) \end{aligned}$$

2.8.6 Vergelijking in Newton

In vectorvorm:

$$\boxed{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla \phi \quad \text{of} \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi}$$

$$\text{waarbij } \phi = \frac{c^2 h_{00}}{2} \text{ en dus } h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}.$$

Dit is een andere manier om de Newtoniaanse gravitatiewet

$$\vec{a} = -\nabla \phi$$

te schrijven.

2.8.7 Metrische component in termen van potentiaal

Door de metrische g_{00} te schrijven als:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (5)$$

is de directe link te zien tussen de metrische tensor (component g_{00}) aan de linkerkant en het gravitationele potentiaal ϕ aan de rechterkant.

2.8.8 Voorbeeld: berekening van h_{00} op Aarde

De waarde van h_{00} op Aarde kan nu worden berekend en gecontroleerd of deze waarde verwaarloosbaar is, wat betekent dat de afwijking ten opzichte van de Minkowski-metrick, als gevolg van het gravitationele veld, is te verwaarlozen.

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}, \quad \phi = \frac{GM_{aarde}}{R_{aarde}}$$

Of:

$$h_{00} = \frac{2GM}{c^2 R}$$

Met:

- $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- $M_{aarde} \simeq 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ $R_{aarde} \simeq 6400 \text{ km}$
- $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Verkrijgen we:

$$h_{00} \simeq \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6.4 \cdot 10^6 \cdot (9 \cdot 10^{16})} \simeq 10^{-9}$$

Voor de Zon is dit $\sim 10^{-6}$ en voor een witte dwerg $\sim 10^{-4}$, wat bevestigt dat de zwakveldbenadering over het algemeen geldig is in veel realistische situaties.

2.8.9 Kernpunten en Intuïtie

- In de algemene relativiteit volgen vrije deeltjes een **geodeet** in gekromde ruimte-tijd.
- In het klassieke geval (Newton), volgt een deeltje een baan onder invloed van de zwaartekracht:

$$\vec{a} = -\nabla\Phi$$

waarbij Φ het gravitatiepotentiaal is.

- In de **zwakke-veld-benadering** en voor **langzame snelheden** reduceert de geodetische vergelijking tot deze Newtoniaanse vorm.
- Dit vereist dat:
 - De ruimtetijd nauwelijks gekromd is $\Rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$
 - Alleen g_{00} significant afwijkt van de vlakke Minkowski-metrick $\Rightarrow g_{00} \approx -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$
- De component Γ_{00}^i blijkt in deze benadering gelijk te zijn aan $\partial^i \phi$, wat leidt tot Newtons zwaartekrachtsvergelijking.

Intuïtief

Einsteins theorie moet in het alledaagse leven dezelfde voorspellingen doen als Newtons theorie. Dat wil zeggen:

- Als zwaartekracht **zwak is** (bijv. rond de aarde),
- En de snelheden **veel kleiner zijn dan het licht** (bijv. vallende appels),
- Dan moet de relativistische formule **overgaan** in de klassieke.

De geodetische vergelijking zegt: “een deeltje beweegt in kromme ruimte-tijd, zonder kracht”. Maar in zwakke velden kun je die kromming schrijven als een kleine afwijking van vlakke ruimte. En die afwijking zie je dan als een “effectieve kracht” - precies zoals Newton het beschreef!

Dus: Newton’s zwaartekracht is een **limietgeval** van de algemene relativiteitstheorie. De appel valt, niet door een kracht, maar omdat de tijdscomponent g_{00} iets gekromd is door de massa van de aarde.

Samenvattende vergelijkingstabel:

<u>Theorie</u>	<u>Formule</u>	<u>Interpretatie</u>
Newton (klassiek)	$\vec{a} = -\nabla\Phi$	Versnelling door kracht
Einstein (zwakke limiet)	$\frac{d^2x^i}{dr^2} = -\Gamma_{00}^i$	Afwijking van rechte lijn door tijdskromming
Link tussen beide	$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\partial^i g_{00} \approx \partial^i\phi$	g_{00} encodeert het potentiaal

2.9 Generaliseren van de Definitie van de Metrische Tensor

In de vorige secties hebben we gezien hoe de geodetische vergelijking wordt gegeneraliseerd van een inertiaalstelsel naar een willekeurig coördinatenstelsel. Op een vergelijkbare manier breiden we nu de definitie van het lijnelement uit van vlakke Minkowski-ruimte-tijd naar een algemene gekromde ruimte-tijd — een zogenoemde *pseudo-Riemann-variëteit*. Deze structuur vormt de wiskundige basis van de algemene relativiteitstheorie.

2.9.1 Het Minkowski-lijnelement in een lokaal inertiaalstelsel

In een lokaal inertiaalstelsel gebruiken we de coördinaten ξ^α , gedefinieerd als:

$$\xi^0 = ct, \quad \xi^1 = x, \quad \xi^2 = y, \quad \xi^3 = z$$

Het Minkowski-lijnelement kan als volgt worden beschreven (zie ook [Onafhankelijkheid van het Gekozen Coördinatenstelsel 2.2.2](#) vergelijking [equation 2 2 4 2](#) en zie ook [5.6.1 Uitgebreide Toelichting op de Metrische Tensor](#))

Het bijbehorende lijnelement luidt:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

waarbij $\eta_{\alpha\beta}$ de Minkowski-metrick is:

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2.9.2 Coördinatentransformatie naar een algemeen stelsel

We gaan nu over naar een willekeurig, mogelijk gekromd coördinatenstelsel x^μ , waarin de oude coördinaten ξ^α functies zijn van de nieuwe:

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

De differentiële verandering $d\xi^\alpha$ wordt dan via de kettingregel:

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^3} dx^3$$

Door gebruik te maken van de Einstein-sommatieconventie:

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \text{ en } d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Daarmee kunnen we het lijnelement herschrijven als:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

2.9.3 Definitie van de algemene metrische tensor

We definiëren nu de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ als:

$$\text{metric tensor: } g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Zodat het lijnelement in het nieuwe stelsel wordt:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

2.9.4 Eigenschappen van de metrische tensor

De eigenschappen van de metrische tensor zijn:

- **Symmetrie:**

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

Dit volgt direct uit de definitie, aangezien de Minkowski-metrik symmetrisch is.

- **Inverse metrik:**

$$g^{\mu\nu} \text{ zodanig dat } g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\mu$$

waarbij δ_ν^μ de Kronecker-delta is.

- **Covariant versus contravariant**

De inverse $g^{\mu\nu}$ wordt de **contravariante metrik** genoemd; $g_{\mu\nu}$ is de **covariante metrik**.

2.9.5 Belang van de metrik in de relativiteit

De metrische tensor bevat **alle informatie over de structuur van ruimte-tijd**. Zij bepaalt afstanden, hoeken, kromming en dus ook het gedrag van objecten onder invloed van zwaartekracht. In de context van de algemene relativiteitstheorie is zwaartekracht niets anders dan een manifestatie van kromming van ruimte-tijd. Die kromming wordt volledig beschreven door de metrik.

Daarom is het **fundamentele doel van de algemene relativiteitstheorie** het vinden van $g_{\mu\nu}$ - de metrik - als oplossing van de Einstein-veldvergelijkingen. Eenmaal bekend, bepaalt deze tensor het verloop van vrije beweging, de kromming van ruimte en tijd, en de interactie met energie en massa.

2.9.6 Aantal onafhankelijke componenten

Hoewel $g_{\mu\nu}$ op het eerste gezicht 16 componenten bevat (in een 4x4-matrix), is zij symmetrisch: $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Hierdoor blijven er slechts 10 onafhankelijke componenten over. Deze tien functies van ruimte-tijd vormen de onbekenden in Einsteins veldvergelijkingen.

2.9.7 Kernpunten en Intuïtie

- De **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$ definieert de afstand in ruimte-tijd via het lijn-element:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

- Deze formule geldt in elk coördinatenstelsel - vlak of gekromd - zolang $g_{\mu\nu}$ correct wordt aangepast.
- De metrik is:
 - **Symmetrisch:** $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$
 - **Tensorieel:** verandert volgens tensortransformaties bij coördinatenwissels.
- De metrik bevat **alle informatie over de lokale geometrie**: afstand, hoek, volume en lichtkegels.
- In gekromde ruimte is de metrik **plaatsafhankelijk**: $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$
- Door generalisatie wordt de metrik het **fundamentele object** waarop alle andere geometrische grootheden gebaseerd zijn (Christoffel-symbolen, Riemann-tensor, etc.).

Intuïtief

In de speciale relativiteit is afstand in de ruimte-tijd iets als:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Dat is de Minkowski-metrik: vlak en constant

In de algemene relativiteit zeggen we: **de ruimte-tijd zelf is vervormbaar**, dus die afstandsformule moet worden **aangepast aan de kromming**.

Dat doen we met een **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$, die op elk punt vertelt **hoe ruimte en tijd gemeten worden**.

Je kunt het zien als een meetlat die **lokaal verandert van vorm** afhankelijk van waar je staat. Soms is een "meter" meer of minder dan elders, en hoeken kunnen schuin worden getrokken - afhankelijk van de massa/energie in de buurt.

De generalisatie betekent dat we niet langer een universele, vaste formule hebben voor afstand, maar een **flexibel veld** dat op elk punt anders is - en **tensorieel** gedraagt.

Tabeloverzicht:

<u>Grootheid</u>	<u>Betekenis</u>
$g_{\mu\nu}(x)$	Lokaal meetrecept voor ruimte-tijd
Symmetrie	$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$
Tensor-transformatie	Metrik past zich aan bij coördinatenwissel
Afstand	$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
Speciale limiet	$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (Minkowski-metrik)

2.10 De Riemann-Krommingstensor

De **Riemann-krommingstensor** is een van de belangrijkste concepten in de algemene relativiteitstheorie. Deze tensor beschrijft hoe ruimte-tijd lokaal gekromd is als gevolg van de aanwezigheid van massa en energie. Hij bepaalt hoe vectoren veranderen bij parallel transport langs kromme paden rond een gesloten lus.

In vlakke, Euclidische ruimte, waarin geen zwaartekrachtseffecten voorkomen, verdwijnt de Riemann-tensor:

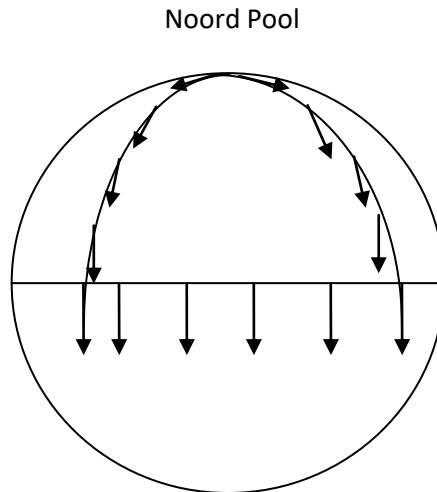
$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0 \text{ (in vlakke ruimte)}$$

In dit hoofdstuk leiden we de Riemann-tensor af op twee manieren:

1. Via de **commutator van twee covariante afgeleiden**
2. Via de methode van **geodetische deviatie**

2.10.1 Afleiding via de Commutator van de Covariante Afgeleiden.

Met behulp van het concept van parallel transport van vectoren of tensoren zullen we de uitdrukking voor de Riemann-tensor afleiden.



Parallel transport van een vector rond een gesloten lus

Een intuïtief voorbeeld van kromming vinden we op het aardoppervlak. Stel dat we met een horizontaal gehouden stok van de Noordpool langs een meridiaan naar de evenaar lopen. Daar draaien we 90 graden, lopen over de evenaar, en keren via een andere meridiaan terug naar de Noordpool. Ondanks dat we de stok in “gelijke richting” houden, wijst deze na terugkeer in een andere richting. Dit verschil komt door de kromming van het oppervlak.

Op een gelijkaardige manier kunnen we in een infinitesimale lus op een variëteit een vector parallel transporteren. In vlakke ruimte verandert de vector niet; in gekromde ruimte wél. Dit verschil bij parallel transport is rechtstreeks gekoppeld aan de Riemann-tensor.

We definiëren parallel transport als beweging waarbij de **covariante afgeleide** van een vector nul is. Om de Riemann-tensor af te leiden, onderzoeken we hoe het resultaat van tweemaal covariant differentiëren afhangt van de volgorde. De **commutator** van de covariante afgeleiden geeft ons die maat voor kromming

2.10.1.1 Covariante Afgeleide Commutator

Een commutator verwijst hier naar het verschil tussen twee bewerkingen, waarbij de ene in de ene richting plaatsvindt en de andere in de tegenovergestelde richting. De commutator wordt gedefinieerd als:

$$[AB] = AB - BA$$

De commutator is dus alleen nul wanneer de volgorde van de twee bewerkingen niet relevant is.

Om de Riemann-tensor te verkrijgen, wordt de covariante afgeleide als bewerking gekozen. De commutator van twee covariante afgeleiden meet het verschil tussen het parallel transporteren van de tensor eerst in de ene richting en vervolgens in de tegenovergestelde richting. Dus, als maat voor het verschil van de tensor langs het pad, wordt de covariante afgeleide van de tensor gebruikt.

In een vlakke ruimte maakt de volgorde van covariante afleidingen geen verschil, omdat covariante differentiatie terugvalt op partiële differentiatie, en daarom moet de commutator nul opleveren. Omgekeerd kan elk niet-nul resultaat van het toepassen van de commutator op covariante differentiatie worden toegeschreven aan de kromming van de ruimte, en dit wordt daarom aangeduid als de **Riemann-tensor**.

2.10.1.2 Afleiding van de Riemann-Tensor.

Het doel is nu om de Riemann-tensor af te leiden door de volgende commutator te vinden:

$$[\nabla_c, \nabla_b]V_a = \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a$$

We weten dat de covariante afgeleide van V_a gegeven is door (zie vergelijking 32):

$$\nabla_b V_a = \frac{\partial V_a}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d V_d$$

En dat deze afgeleide zelf een tensor is.

Zoals we in het vorige hoofdstuk hebben gezien:

(zie vergelijking 42)

$$T_{mn}(y) = \nabla_n V_m = \frac{\partial V_m}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^r V_r(x)$$

Dit betekent dat:

$$T_{ab}(y) = \nabla_b V_a = \frac{\partial V_a}{\partial y^b} - \Gamma_{ba}^r V_r(x)$$

Dus, de covariante afgeleide van een vector ($\nabla_b V_a$) is een tensor (zie vergelijking 42).

De covariante afgeleide van een tensor is (zie vergelijking 43) :

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T_{\mu\nu} &= \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - T_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - T_{\mu\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \\ \Rightarrow \nabla_c T_{ab} &= \frac{\partial T_{ab}}{\partial x^c} - T_{eb} \Gamma_{ca}^e - T_{ae} \Gamma_{cb}^e \end{aligned}$$

Dit resulteert in:

$$\nabla_c \nabla_b V_a = \frac{\partial}{\partial x^c} (\nabla_b V_a) - \Gamma_{ac}^e \nabla_b V_e - \Gamma_{bc}^e \nabla_e V_a \quad (1)$$

De eerste term aan de rechterkant:

$$\frac{\partial}{\partial x^c} (\nabla_b V_a) = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^c \partial x^b} - \frac{\partial}{\partial x^c} (\Gamma_{ab}^d V_d) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^c} (\nabla_b V_a) = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^c \partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} \quad (1b)$$

De tweede en derde termen aan de rechterkant:

$$\Gamma_{ac}^e \nabla_b V_e = \Gamma_{ac}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^b} - \Gamma_{be}^d V_d \right) \quad (1c)$$

$$\Gamma_{bc}^e \nabla_e V_a = \Gamma_{bc}^e \left(\frac{\partial V_a}{\partial x^e} - \Gamma_{ae}^d V_d \right) \quad (1d)$$

Door de drie termen (1b, 1c, 1d) samen te voegen in (1) krijgen we:

$$\nabla_c \nabla_b V_a = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^c \partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^b} - \Gamma_{be}^d V_d \right) - \Gamma_{bc}^e \left(\frac{\partial V_a}{\partial x^e} - \Gamma_{ae}^d V_d \right) \quad (1e)$$

Door b en c te verwisselen, vinden we:

$$\nabla_b \nabla_c V_a = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^b \partial x^c} - \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ce}^d V_d \right) - \Gamma_{cb}^e \left(\frac{\partial V_a}{\partial x^e} - \Gamma_{ae}^d V_d \right) \quad (2)$$

Door (1e)-(2) af te trekken compenseren de eerste en laatste termen elkaar. Aangezien het Christoffel-symbool symmetrisch wat betreft de onderste indices, dan krijgen we:

$$\nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a = -\Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^b} - \Gamma_{be}^d V_d \right) + \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_d}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} + \Gamma_{ab}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ce}^d V_d \right)$$

Door de haakjes in de laatste termen uit te werken en de termen met V_d te factoriseren:

$$\begin{aligned} \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= -\Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d V_d + \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} + \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d V_d \\ &= \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} + \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} + \left(\frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d \right) V_d \end{aligned}$$

Vanuit [vergelijking 2.5.1.1](#) in het vorige hoofdstuk weten we:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k e_k \quad (3)$$

Daarom:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_e}{\partial x^c} = \Gamma_{ec}^d V_d \Rightarrow \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} &= \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d V_d \text{ en } \frac{\partial V_e}{\partial x^b} = \Gamma_{eb}^d V_d \Rightarrow \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} = \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d V_d \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} + \boxed{\Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c}} - \boxed{\Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b}} + \left(\frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \boxed{+\Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d} - \boxed{\Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d} \right) V_d \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} \end{aligned}$$

Na het verwisselen van d met e in de eerste en de derde term aan de rechterkant:

$$\begin{aligned}\nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} = \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d V_d + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d V_d - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} = \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d \right) V_d\end{aligned}$$

We definiëren de uitdrukking binnen de haakjes aan de rechterkant als de **Riemann-tensor**, wat betekent dat:

$$\begin{aligned}[\nabla_c, \nabla_b] V_a &= \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a = R_{abc}^d V_d \\ R_{abc}^d &= \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d \\ R_{abc}^d &= \Gamma_{ac,b}^d - \Gamma_{ab,c}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d\end{aligned}$$

Dit is de **componentvorm van de Riemann-tensor**, die expliciet de afgeleiden van de Christoffel-symbolen en hun producten bevat. Deze uitdrukking laat zien hoe kromming een intrinsiek geometrisch effect is dat niet weggenomen kan worden door een verandering van coördinaten.

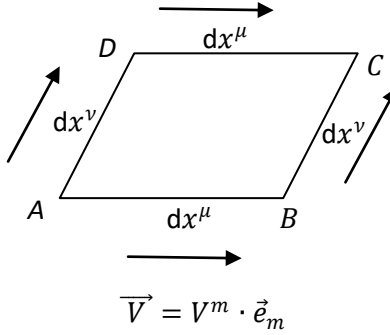
Opmerking:

Hier kan de commutator worden beschouwd als het verschil van twee vectoren. De grootte van de resulterende vector is de Riemann-tensor.

2.10.1.3 Alternatieve Afleiding van de Riemann-Tensor via de Commutator

We beschouwen een infinitesimaal gebied waarover een vector wordt verplaatst (parallel getransporteerd) via twee verschillende paden. Wanneer de variëteit vlak is, zou het verschil tussen de twee eindvectoren nul zijn. Echter, in het geval dat de variëteit intrinsiek gekromd is, zou dit leiden tot een verschil tussen de eindvectoren. Eerst verplaatsen we een vector $\vec{V}$ van punt A via B naar C. Om de richting van de beweging van de vector te bepalen, nemen we de afgeleide van de vector met respect tot dx^μ en vervolgens bekijken we de verandering van dit resultaat met respect tot dx^ν .

Daarna doen we hetzelfde van A via D naar C, nu eerst met respect tot dx^ν en vervolgens tot dx^μ . Dan trekken we beide resultaten van elkaar af, wat zou moeten leiden tot de Riemann-tensor.



De vector $\vec{e}_m$ is de raakvector, dus de afgeleide van de positievector of de afgeleide van het traject. Als het traject een rechte lijn is, dan is de afgeleide van $\vec{e}_m$ een constante; en bijgevolg is de afgeleide van $\vec{e}_m$, en dus het Christoffel-symbool, nul.

Eerst van A naar B om de richting te bepalen, nemen we de afgeleide (zie ook vergelijking 3):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \cdot \vec{e}_m + V^m \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \cdot \vec{e}_m + V^m \Gamma_{m\mu}^k \vec{e}_k$$

Verander de twee dummy-indices, k en m . Dan kan de formule worden aangepast van k naar m en m naar γ .

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m = \left(\frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \right) \vec{e}_m$$

Dit is de covariante afgeleide van de contravariante vector $\vec{V}$. En uit de definitie van het Christoffel-symbool in de vorige hoofdstukken weten we dat $\frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\mu} = \Gamma_{m\mu}^k \vec{e}_k$ (zie ook vergelijking 3).

Vervolgens de verandering van de richting van B naar C met betrekking tot dx^ν :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\nu} + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + V^\gamma \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\nu} \\ \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \Gamma_{m\nu}^k \vec{e}_k + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + V^\gamma \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \Gamma_{m\nu}^k \vec{e}_k \end{aligned}$$

Vervang in het rechterlid van de vergelijking in de tweede term de indices k met m en m met γ , en verwissel in de vijfde term k en m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + V^\gamma \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m \vec{e}_m \\ \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m + \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m \end{aligned}$$

Nu voor de andere richting, verwissel μ en ν :

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m V^\gamma \vec{e}_m + \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m$$

Trek nu de laatste twee vergelijkingen van elkaar af:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \\
& = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} V^\gamma \vec{e}_m - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m V^\gamma \vec{e}_m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m + \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_m - \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m \\
& \quad - \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m - \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m \\
& = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} V^\gamma \vec{e}_m - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m V^\gamma \vec{e}_m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m \\
& \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m \right) V^\gamma \vec{e}_m \\
& \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = R_{\gamma\mu\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m
\end{aligned}$$

2.10.1.4 Definitie van de Riemann-tensor:

De uitdrukking binnen de haakjes wordt gedefinieerd als de Riemann-tensor $R_{\gamma\mu\nu}^m$:

$$R_{\gamma\mu\nu}^m = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m$$

Waarbij de Riemann-tensor de mate van kromming van de ruimte-tijd beschrijft door het verschil in parallel transport van een tensor rond een gesloten lus.

2.10.1.5 Conclusie:

Deze alternatieve afleiding van de Riemann-tensor via de commutator biedt een manier om te begrijpen hoe de kromming van de ruimte-tijd wordt bepaald door het verschil in parallel transport van tensoren. De Riemann-tensor is dus een cruciaal hulpmiddel in de algemene relativiteitstheorie voor het beschrijven van de geometrie en de gravitationele effecten in de ruimte-tijd.

2.10.2 Afleiding van de Riemann-Tensor via Geodetische Deviatie

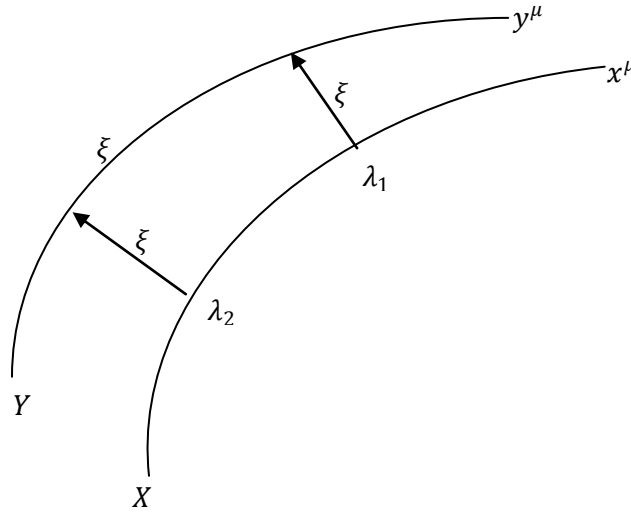
In het vorige hoofdstuk hebben we een methode getoond om de Riemann-tensor af te leiden uit de commutator van covariante afgeleiden, dat fysiek overeenkomt met het verschil tussen het parallel transporteren van een vector eerst over het ene pad en dan over het andere. Een andere interpretatie komt voort uit de relatieve versnelling van nabijgelegen deeltjes in vrije val.

Stel je een wolk van deeltjes voor in vrije val. Laten we aannemen dat een waarnemer met een van deze deeltjes meereist. Hij kijkt naar een nabijgelegen deeltje en meet de positie ervan in lokale inerte coördinaten. In de Speciale Relativiteitstheorie zal dit deeltje zich in een rechte lijn met constante snelheid bewegen, zonder versnelling. Maar wat gebeurt er in een gravitatieveld?

Zoals we ons herinneren uit het vorige hoofdstuk, generaliseert een geodetische lijn het begrip van een "rechte lijn" naar gekromde ruimte-tijd.

Hier zullen we laten zien hoe de evolutie van de afstand gemeten tussen twee naburige geodetische lijnen, ook wel geodetische deviatie genoemd, inderdaad gerelateerd kan zijn aan een niet-nul kromming van de ruimte-tijd, of in Newtoniaanse termen, aan de aanwezigheid van *getijdenkrachten*. Laten we dus twee deeltjes beschouwen die twee zeer nabije geodetische lijnen volgen.

Hun respectieve pad kan worden beschreven door de functies $x^\mu(\tau)$ (voor het referentiedeeltje) en $y^\mu(\tau) \equiv x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$ (voor het tweede deeltje) waarbij τ (tau) de eigen tijd langs de wereldlijn van het referentiedeeltje is, en waarbij ξ^μ verwijst naar de afwijkingsvier-vector die het ene deeltje met het andere verbindt op elk gegeven moment τ .



De relatieve versnelling A^α van de twee objecten wordt ruwweg gedefinieerd als de tweede afgeleide van de scheidingsvector ξ^α terwijl de objecten langs hun respectieve geodeten voortbewegen.

Ons doel in dit hoofdstuk is om aan te tonen dat deze relatieve versnelling gerelateerd is aan de Riemann-tensor via de volgende vergelijking:

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\right)^\alpha = -R_{\mu\sigma\nu}^\alpha u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

In het geval dat de ruimte-tijd vlak is, is de Riemann-tensor nul, wat resulteert in een nul relatieve versnelling.

Aangezien elk deeltje een geodetische lijn volgt, is de vergelijking van hun respectieve coördinaat als volgt (zie [vergelijking 2.6.1](#)):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x^\alpha(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ 0 &= \frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y^\alpha(\tau)) \frac{dy^\mu}{d\tau} \frac{dy^\nu}{d\tau} \end{aligned}$$

In elk van deze vergelijkingen is het Christoffel-symbool gelijk op elke respectievelijke positie van de deeltjes x en y . Aangezien de scheiding tussen de deeltjes infinitesimaal is, evalueren we het Christoffel-symbool op de positie $y^\alpha(\tau)$ door middel van een Taylor-reeksontwikkeling:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \dots \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Bij benadering tot de eerste afgeleide omdat ξ is infinitesimaal is.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y^\alpha(\tau)) \approx \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x^\alpha(\tau)) + \xi^\sigma [\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x^\alpha(\tau))]$$

Dit kan ook benaderd worden als volgt voor een infinitesimale Δx :

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{dx} &= \frac{\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x + \Delta x) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{\Delta x} \\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x + \Delta x) &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x) + \Delta x \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{dx} \\ \Delta x &= \xi \\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x + \xi) &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x) + \xi \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{dx} \end{aligned}$$

Met de aanname dat $y^\alpha(\tau) = x^\alpha(\tau) + \xi^\alpha(\tau)$ en door deze laatste uitdrukking te vervangen in de geodetische vergelijking van deeltjes y , krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y^\alpha(\tau)) \frac{dy^\mu}{d\tau} \frac{dy^\nu}{d\tau} \\ 0 &= \frac{d^2(x^\alpha + \xi^\alpha)}{d\tau^2} + [\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)] \frac{d(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau} \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau} \\ 0 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + [\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)] \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

Hier worden het Christoffel-symbool en zijn eerste orde afgeleiden nu geëvalueerd op $x^\alpha(\tau)$.

Door alle termen in de haakjes uit te werken en de termen van de tweede orde met betrekking tot ξ te verwaarlozen, krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \cancel{\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau}} \right) + \\ &\quad + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \cancel{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau}} + \cancel{\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} + \cancel{\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau}} \right) \end{aligned}$$

Aangezien we weten dat het Christoffel-symbool symmetrisch is ten opzichte van de lagere indices, kunnen deze worden omgewisseld:

$$0 = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + 2 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \right) + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Door de geodetische vergelijking van deeltje x te gebruiken, zoals gegeven (zie [equation 2.6.1](#)):

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Dan vallen de eerste en de derde term weg. Dan verkrijgen we:

$$0 = \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) u^\mu u^\nu$$

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = -2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} - \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) u^\mu u^\nu$$

Hier is $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ de vier-snelheidsvector van het referentiedeeltje.

Vervolgens hebben we een uitdrukking voor $\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}$, maar dit is niet de totale afgeleide van de vier-vector ξ , aangezien de afgeleide ook een bijdrage kan krijgen van de verandering van de basisvectoren terwijl het object zich langs zijn geodetische lijn beweegt. Om de totale afgeleide te krijgen, gebruiken we:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (\xi^\alpha e_\alpha) = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \xi^\alpha \frac{de_\alpha}{d\tau} = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \xi^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{de_\alpha}{dx^\mu}$$

Door de dummy-index α te vervangen door σ in de tweede term en gebruik te maken van de definitie van het Christoffel-symbool, krijgen we:

$$\xi^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{de_\sigma}{dx^\mu} = \xi^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha e_\alpha = \xi^\sigma u^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha e_\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \xi^\sigma u^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha e_\alpha = \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \xi^\sigma u^\mu \right) e_\alpha$$

Zodat:

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \xi^\sigma u^\mu$$

Aangezien we nog steeds te maken hebben met de voorwaarde dat ξ een vier-vector is, is de afgeleide ervan met respect tot de eigen tijd ook een vier-vector, dus we kunnen de tweede absolute afgeleide vinden door dezelfde ontwikkeling te gebruiken als voor de afgeleide van eerste orde.

$$\left(\frac{d}{d\tau} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right] \right)^\alpha = \frac{d}{d\tau} \left(\left[\frac{d\xi}{d\tau} \right]^\alpha \right) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^\sigma u^\mu$$

$$\left(\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \right)^\alpha = \left(\frac{d}{d\tau} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right] \right)^\alpha = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \xi^\sigma \right) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \left(\frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\beta \xi^\gamma \right)$$

$$= \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\mu u^\beta \xi^\gamma$$

Door de Christoffel-symbolen en Taylorreeks boven te gebruiken en ν te vervangen door σ in de **eerste term**, krijgen we:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = -2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} \right) u^\mu u^\nu \xi^\sigma$$

Wissel in de eerste term, aan de rechterkant, ν en σ om:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = -2\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} \right) u^\mu u^\nu \xi^\sigma$$

We kunnen de **tweede term** herschrijven, aangezien de Christoffel-symbolen afhankelijk zijn van τ door afhankelijk te zijn van de positie van het referentiedeeltje:

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma = \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma = \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Door de geodetische vergelijking te gebruiken, kunnen we de **derde term** herschrijven, d.w.z. $\frac{du^\mu}{d\tau}$ uitwerken:

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ \frac{du^\mu}{d\tau} &= \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \\ \text{Geodetische vergelijking: } \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= -\Gamma_{\nu\gamma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\nu u^\gamma = \frac{du^\mu}{d\tau} \\ \Rightarrow \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma &= -\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\nu u^\gamma \xi^\sigma \end{aligned}$$

Wissel, in de rechterterm, μ en γ om:

$$\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma = -\Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\gamma u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Ook, om een uitdrukking voor $u^\nu u^\mu \xi^\sigma$, te verkrijgen, met alleen μ, ν en σ , kunnen we de **laatste term** herschrijven door de dummy-indices σ en β te hernoemen:

$$\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\mu u^\beta \xi^\gamma =$$

$$(\sigma \leftrightarrow \gamma) = \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma u^\mu u^\beta \xi^\sigma$$

$$(\beta \leftrightarrow \nu) = \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\sigma}^\gamma u^\mu u^\nu \xi^\sigma$$

$$(\mu \leftrightarrow \nu) = \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Dus uiteindelijk kunnen we, door alle termen te vervangen, schrijven:

$$\left(\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \right)^\alpha = \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma + \left(\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} \right) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\mu u^\beta \xi^\gamma$$

$$= \cancel{-2\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} u^{\mu} \frac{d\xi^{\sigma}}{d\tau}} - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{dx^{\sigma}} \right) u^{\mu} u^{\nu} \xi^{\sigma} + \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}}{dx^{\nu}} u^{\nu} u^{\mu} \xi^{\sigma} - \Gamma_{\gamma\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^{\gamma} u^{\nu} u^{\mu} \xi^{\sigma} + \cancel{2\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} u^{\mu} \frac{d\xi^{\sigma}}{d\tau}} + \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma} u^{\nu} u^{\mu} \xi^{\sigma}$$

Door de eerste en de vijfde term te schrappen en de gemeenschappelijke factor $u^{\nu} u^{\mu} \xi^{\sigma}$ eruit te halen verkrijgen we:

$$\left(\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \right)^{\alpha} = - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{dx^{\sigma}} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma} \right) u^{\nu} u^{\mu} \xi^{\sigma}$$

Omdat dit nog steeds een tensorvergelijking is, is de hoeveelheid tussen de haakjes een tensor en kunnen we de **Riemann-tensor** definiëren als:

$$R_{\mu\sigma\nu}^{\alpha} = \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{dx^{\sigma}} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma} \right)$$

Dan kunnen we de bovenstaande vergelijking herschrijven in een kortere uitdrukking, bekend als **de geodetische deviatievergelijking**:

$$\left(\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \right)^{\alpha} = -R_{\mu\sigma\nu}^{\alpha} u^{\nu} u^{\mu} \xi^{\sigma}$$

Aangezien de enige grootte in deze vergelijking die intrinsiek afhankelijk is van de metriek de Riemann-tensor is, zien we dat als deze identiek aan nul is dat dan de ruimte-tijd vlak is. Maar als slechts één component van deze tensor niet nul is, dan is de ruimte-tijd gekromd.

2.10.3 Kernpunten en Intuïtie

- De **Riemann-tensor** $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$ is de fundamentele tensor die **kromming van ruimte-tijd** beschrijft.
- Ze kan worden afgeleid via de commutator van covariante afgeleiden, of via de geodetische deviatievergelijking.
- Haar componentvorm is:

$$R_{\mu\sigma\nu}^{\alpha} = \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{dx^{\sigma}} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma}$$

- Voor een geodetische lijn geldt de volgende eigenschap:

$$0 = \frac{d^2 x^{\beta}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \quad \text{Geodetische vergelijking}$$

- Of:

$$\frac{d^2 x^{\beta}}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} u^{\nu} u^{\mu}$$

- Terwijl voor de afwijking van één geodetische naar een infinitesimaal nabijgelegen geodetische lijn geldt:

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\right)^\alpha = -R^\alpha_{\mu\sigma\nu} u^\nu u^\mu \xi^\sigma \quad \text{Geodetische deviatievergelijking}$$

- Een niet-nul Riemann-tensor impliceert gekromde ruimte-tijd en daarmee de aanwezigheid van zwaartekracht.
- Meet het **niet-commutativiteitseffect** van tweemaal covariant afleiden van een vector:

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma$$

De tensor is volledig uit te drukken in termen van **Christoffel-symbolen en hun afgeleiden**.

- In vlakke ruimte is $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$; in gekromde ruimte is zij in het algemeen niet nul.
- Kromming is **lokaal meetbaar** via het gedrag van geodeten: als twee vrije deeltjes die dicht bij elkaar starten van elkaar gaan afwijken, duidt dat op kromming.

Intuïtief

Stel je twee raketten voor die naast elkaar in de ruimte beginnen te vliegen, zonder motoren (vrij vallend), elk op een iets andere positie.

In vlakke ruimte blijven ze **parallel**, maar in gekromde ruimte (bijv. rond een planeet) zullen ze **naar elkaar toe of van elkaar af buigen**.

De **Riemann-tensor** meet precies dat effect:

- Hoe verandert de “richting” van een vector als je hem transporteert in een gesloten lus?
- Als het resultaat afwijkt van de oorspronkelijke vector, is de ruimte **gekromd**.

Je kunt het vergelijken met een pijl die je meeneemt op een rondje over een bol: na terugkomst staat hij niet meer in dezelfde richting - **kromming laat zich zien als richtingsverandering**.

Tabeloverzicht:

Grootheid

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu}$$

Bouwstenen

Fysieke betekenis

Nul in vlakke ruimte

Dimensie

Betekenis

Meet kromming door vergelijking van transport

Christoffel-symbolen + hun afgeleiden

Afwijking tussen nabije geodeten

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$$

4e-rangs tensor (4 indices)

2.11 Symmetrieën en Onafhankelijke Componenten

In de voorgaande hoofdstukken hebben we de vrij complexe uitdrukking voor de Riemann-krommingstensor afgeleid - een combinatie van afgeleiden en producten van Christoffel-symbolen, met in totaal 256 (=4⁴) componenten in een vierdimensionale ruimte-tijd. In dit hoofdstuk tonen we aan dat de Riemann-tensor in werkelijkheid slechts 20 onafhankelijke componenten heeft, en dat deze volledig worden bepaald door de symmetrieën van de tensor en de tweede-orde afgeleiden van de metriek.

We onderzoeken deze symmetrieën in een Lokaal Inertiaal Frame (LIF), waarin alle Christoffel-symbolen in de oorsprong nul zijn. Deze symmetrieën zijn echter niet beperkt tot dit specifieke stelsel: omdat tensorvergelijkingen coördinaten-onafhankelijk zijn, gelden ze in elk referentiekader.

2.11.1 Definitie en Herformulering

De Riemann-tensor is in het algemeen gedefinieerd als:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{dx^{\mu}} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\mu}^{\gamma}$$

Wetende dat alle Christoffel-symbolen, $\Gamma = 0$, nul zijn in de oorsprong van het Lokale Inertiaal Frame, reduceert dit tot:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{dx^{\mu}} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{dx^{\nu}}$$

Door het contractiemechanisme toe te passen, kunnen we de Riemann-tensor herschrijven met alle indices verlaagd:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\sigma} R_{\beta\mu\nu}^{\sigma} \equiv g_{\alpha\sigma} \left[\frac{d\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}}{dx^{\mu}} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}}{dx^{\nu}} \right]$$

De Christoffel-symbolen kunnen worden uitgedrukt in termen van de metriek:

$$\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\gamma}} \right)$$

Zodat we kunnen schrijven:

$$g_{\alpha\sigma} \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}}{dx^{\mu}} = \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\gamma}} \right) + \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\gamma}} \right) \quad (1)$$

De **tweede term** is nul omdat de Christoffel-symbolen nul zijn op de oorsprong van het lokale inertiale frame, zoals hierboven vermeld:

$$\frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\gamma}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^\mu} g_{\sigma\gamma} \left[\frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\gamma} \right) \right] = \\
&= g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^\mu} g_{\sigma\gamma} \Gamma_{\beta\nu}^\sigma = 0
\end{aligned}$$

Met dit resultaat en uit vergelijking (1) volgt:

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\sigma} \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^\sigma}{dx^\mu} &= \frac{1}{2} \delta_\alpha^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\gamma} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} \right)
\end{aligned}$$

Wisselen van indices μ en ν , leidt tot de tweede term van de uitdrukking van de Riemann-tensor:

$$g_{\alpha\sigma} \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^\sigma}{dx^\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

De middelste termen verdwijnen na het aftrekken van de laatste twee uitdrukkingen, wat resulteert in:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= g_{\alpha\sigma} \left[\frac{d\Gamma_{\beta\nu}^\sigma}{dx^\mu} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^\sigma}{dx^\nu} \right] \\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

Vermenigvuldigd met -1:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right] \quad (3)$$

Wisselen van μ en ν in (2):

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right] \quad (4)$$

Dus, uit (3) en (4) krijgen we:

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}}$$

Houd er rekening mee dat deze vergelijking alleen geldig is op de oorsprong van het Lokale Inertiële Frame. Maar aangezien dit tensorvergelijkingen zijn en, zoals we weten, als deze tensorvergelijkingen geldig zijn in één referentiekader, zijn ze geldig in elk referentiekader.

Nu zullen we op een vergelijkbare manier aantonen dat de Riemann-tensor anti-symmetrisch is door de eerste twee indices te verwisselen:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} \right] \\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right]
\end{aligned}$$

$$R_{\beta\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} \right]$$

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}}$$

Als we de eerste en derde indices ($\alpha \leftrightarrow \mu$), and en ook de tweede en vierde ($\beta \leftrightarrow \nu$), verwisselen, krijgen we:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} \right]$$

$$\boxed{R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}}$$

Als we de laatste drie indices β, μ en ν cyclisch permuteren en de drie termen optellen, krijgen we:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} &= \frac{1}{2} \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu}} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0}$$

2.11.2 Symmetrie-eigenschappen

Uit de bovenstaande uitdrukking kunnen we de volgende symmetrieën van de Riemann-tensor afleiden:

1. **Antisymmetrie in de laatste twee indices:**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$$

2. **Antisymmetrie in de eerste twee indices:**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

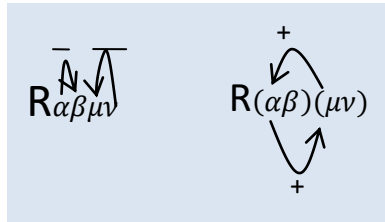
3. **Symmetrie onder verwisseling van indexparen:**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

4. **De eerste Bianchi-identiteit (cyclische symmetrie):**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$

Of weergegeven als:



De antisymmetrie betekent dat de tensor verandert van teken bij verwisseling van deze indices, wat samenhangt met de richting van lus-integratie bij paralleltransport.

2.11.3 Aantal Onafhankelijke Componenten

In een vierdimensionale ruimte-tijd, met vier waarden per index, zou een willekeurige (0,4)-tensor 256 componenten hebben. Door de hierboven genoemde symmetrieën vermindert dit aantal drastisch:

- Door antisymmetrie in $(\alpha\beta)$ en $(\mu\nu)$: van $4^4 = 256$ naar $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 6 \times 6 = 36$
- Symmetrie tussen de paren: $36 \rightarrow \frac{6 \times (6+1)}{2} = 21$
- Bianchi-identiteit: vermindert het aantal verder tot **20 onafhankelijke componenten**

2.11.4 Kernpunten en Intuïtie

- De **Riemann-tensor** $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ bezit meerdere symmetrieën, waardoor het aantal onafhankelijke componenten sterk wordt beperkt:

1. **Antisymmetrie in laatste twee indices:**

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$$

2. **Antisymmetrie in eerste twee indices:**

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$$

3. **Symmetrie bij verwisselen van indexparen:**

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

4. **Bianchi-identiteit (contractie-eigenschap):**

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0$$

- Door deze symmetrieën heeft de Riemann-tensor in 4D **slechts 20 onafhankelijke componenten**, niet 256.

Dus hoewel de oorspronkelijke uitdrukking van de Riemann-tensor complex lijkt, wordt deze dankzij zijn rijke symmetriestructuur volledig bepaald door slechts 20 onafhankelijke componenten. Deze componenten representeren alle mogelijke vormen van kromming in een vierdimensionale ruimte-tijd en vormen daarmee de kern van de geometrische beschrijving van zwaartekracht in de algemene relativiteitstheorie.

Intuïtief

Stel je een kubus voor met 4 indexposities - in theorie zouden er $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ componenten zijn.

Maar door symmetrieën zoals:

- “als je deze twee indices verwisselt, verandert alleen het teken”
- “als je de paren verwisselt, blijft het gelijk”

blijkt dat **veel van die 256 waarden met elkaar samenhangen**.

Denk aan een schilderij met spiegelsymmetrie: als je één helft kent, weet je ook wat er aan de andere kant moet staan. Zo werkt het ook met de structuur van de Riemann-tensor.

Deze eigenschappen zijn geen toeval, maar komen voort uit de manier waarop de tensor wordt afgeleid uit de metrie en haar afgeleiden.

Tabeloverzicht:

Symmetrie

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Bianchi-identiteit

Totaal in 4D

Uitleg

Antisymmetrie in laatste twee indices

Antisymmetrie in eerste twee indices

Verwisselen van indexparen

Lineaire relatie tussen permutaties van indices

20 onafhankelijke componenten

2.12 Bianchi-Identiteit en Ricci Tensor

De Bianchi-identiteit speelt een cruciale rol bij het afleiden van de veldvergelijkingen van Einstein. Hoewel de Riemann-krommingstensor zelf niet direct in deze vergelijkingen voorkomt, kunnen we uit deze tensor - via contractie - twee andere belangrijke krommingsgrootheden afleiden: de Ricci-tensor en de Ricci-scalar.

In dit hoofdstuk zullen we deze drie fundamentele objecten introduceren en hun onderlinge verband toelichten, te beginnen met de afleiding van de Bianchi-identiteit.

2.12.1 Bianchi-identiteit

De Bianchi-identiteit luidt:

$$\nabla_{\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0$$

Uit het vorige hoofdstuk [2.11 Symmetrieën en Onafhankelijke Componenten](#) weten we dat in de oorsprong van een Lokaal Inertieel stelsel de Riemann-tensor geschreven kan worden als:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} \right]$$

Omdat de Christoffel-symbolen in de oorsprong van dit stelsel verdwijnen, wordt de covariante afgeleide daar gelijk aan de gewone afgeleide:

$$\nabla_{\sigma} V^{\alpha} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}$$

Dus, in de oorsprong geldt:

$$\nabla_{\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial R_{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}$$

Substitutie van de uitdrukking voor de Riemann-tensor levert:

$$\nabla_{\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} \right]$$

Door de index van de afgeleide cyclisch te permuteren met de laatste twee indices, μ, ν , van de tensor, krijgen we:

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} R_{\alpha\beta\sigma\mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\sigma}} \right] \\ \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} R_{\alpha\beta\nu\sigma} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\nu}} \right] \end{aligned}$$

Door deze drie vergelijkingen op te tellen en gebruik te maken van de commutativiteit van partiële afgeleiden, zien we dat de termen paargewijs elkaar opheffen, en krijgen we **de Bianchi-identiteit**:

$$\boxed{\nabla_{\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0}$$

Deze Bianchi-identiteit is een tensorvergelijking die universeel geldig is - in elk coördinatenstelsel.

2.12.2 Kernpunten en Intuïtie

- De **Bianchi-identiteit** is een fundamentele identiteit voor de Riemann-tensor:

$$\nabla_\lambda R^\rho_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\rho_{\sigma\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\rho_{\sigma\lambda\mu} = 0$$

- Door contractie leidt dit tot de zogenaamde **gecontracteerde Bianchi-identiteit**:

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0$$

- Deze gecontracteerde versie is **cruciaal voor de consistentie van de Einstein-veldvergelijkingen**.
- Ze impliceert dat de afgeleide van de tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ nul is:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

- Dit correspondeert met het behoud van energie en impuls in gebogen ruimte-tijd.

Intuïtief

De Riemann-tensor is niet zomaar een willekeurig object - hij moet aan diepere structurele regels voldoen. De **Bianchi-identiteit** is zo'n regel: een soort **interne consistentie** van de kromming van ruimte-tijd.

Als je met vectoren werkt, zeg je: "de divergentie van de kracht is nul als er geen bronnen zijn". Bij tensors zeg je iets vergelijkbaars: *de structuur van de kromming is zó georganiseerd dat bepaalde combinaties ervan altijd verdwijnen* - en dat betekent o.a. **dat de Einstein-vergelijkingen niet zomaar energie uit het niets laten verschijnen**.

De gecontracteerde Bianchi-identiteit is essentieel omdat ze garandeert dat de **Einstein-tensor** $G_{\mu\nu}$ automatisch voldoet aan een behoudswet: energie en impuls blijven behouden in elke kromme ruimte-tijd.

Tabeloverzicht:

Grootheid

Bianchi-identiteit

Gecontracteerde Bianchi-identiteit

Einstein-tensor $G_{\mu\nu}$

Fysieke betekenis

Betekenis

Structurele symmetrie van Riemann-tensor

Impliceert $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Garandeert behoud van energie en impuls in gekromde ruimte

2.12.3 De Ricci-Tensor

In het volgende hoofdstuk zullen we ons bezighouden met de energie-impuls-tensor. Deze tensor is een rang-2 tensor. Om deze reden moeten we de rang-4 Riemann-tensor aanpassen naar een rang-2 tensor, die de Ricci-tensor wordt genoemd. Dit kan worden gedaan door de covariante Riemann-tensor te vermenigvuldigen met een rang-2 contravariante metrische tensor, waarbij twee gemeenschappelijke indices worden gedeeld. Dit proces wordt contractie genoemd.

Door contractie van de eerste en derde index van de Riemann-tensor verkrijgen we de **Ricci-tensor**:

$$g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\mu\beta\nu}^{\beta} = R_{\mu\nu}$$

De Ricci-tensor is symmetrisch:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

2.12.4 De Ricci-Scalar

Door de Ricci-tensor te vermenigvuldigen met de metrische tensor met dezelfde indices, wordt de Ricci-tensor gecontracteerd, wat resulteert in de **Ricci-scalar**:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Deze scalaire kromming R is het spoor van de Ricci-tensor.

Deze tensoren - de Ricci-tensor en Ricci-scalar - vormen samen met de metriek $g_{\mu\nu}$ de bouwstenen van de veldvergelijkingen van Einstein. De Bianchi-identiteit garandeert bovendien de behoudswetten die uit deze vergelijkingen voortvloeien.

2.12.5 Kernpunten en Intuïtie

- De **Ricci-tensor** $R_{\mu\nu}$ is een *contractie* van de Riemann-tensor:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$$

- Hij bevat informatie over **hoe volumes veranderen** in gekromde ruimte-tijd (denk aan uitrekking of samentrekking van geodetenbundels).
- De **Ricci-scalar** R is een verdere contractie:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

- Deze grootheden zijn **coördinaatonafhankelijk** en vormen de basis van de Einstein-veldvergelijkingen.

- Waar de Riemann-tensor lokale kromming volledig beschrijft, zijn Ricci-tensor en scalar vooral **samenvattende maatstaven van kromming** op grotere schaal.

Intuïtief

Denk aan een groep deeltjes in vrije val in een klein volume. Als dat volume begint te **krimpen of uitrekken** naarmate de tijd verstrijkt, komt dat door de **Ricci-tensor**.

Waar de Riemann-tensor zegt *hoe kromming richtingen verdraait*, zegt de Ricci-tensor:

- “hoe beïnvloedt de kromming de vorm van een stof- of lichtstraalbuidel?”

De **Ricci-scalar** kun je zien als een samenvatting in één getal van hoe “gekromd” de ruimte-tijd is op een bepaald punt.

Je zou kunnen zeggen:

- *Riemann* = volledig beeld van kromming
- *Ricci-tensor* = effect op volumes
- *Ricci-scalar* = totale kromming samengevat in één waarde

Tabeloverzicht:

<u>Grootheid</u>	<u>Definitie</u>	<u>Interpretatie</u>
Riemann-tensor	$R^\rho_{\sigma\mu\nu}$	Volledige lokale kromming
Ricci-tensor	$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$	Volumeverandering / samengevatte kromming
Ricci-scalar	$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$	Totale kromming in één getal

2.13 Energie-Impuls Tensor

Het uiteindelijke doel van de algemene relativiteitstheorie is het opstellen van een relatie tussen de geometrie van de ruimte-tijd en de materie of energie die deze vervormt. Daarvoor is een geschikt wiskundig object nodig dat de inhoud van de ruimte-tijd beschrijft: de **energie-impuls-tensor**.

In de speciale relativiteitstheorie is reeds aangetoond dat massa, energie en impuls onderling verbonden zijn. Deze relatie wordt uitgedrukt via de bekende energie-impulsvergelijking:

$$|P|^2 = (m_0 c)^2$$

$$|P|^2 = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

$$\Rightarrow (m_0 c)^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

Waaruit volgt:

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

Dit suggereert dat, binnen de algemene relativiteit, **niet alleen massa**, maar ook **energie en impuls** bijdragen aan het zwaartekrachtsveld.

In de Newtoniaanse limiet beschrijft de vergelijking van Poisson het zwaartekrachtsveld Φ , opgewekt door een massadichtheid ρ (zie: vergelijking 16 in [Appendix 7](#)):

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi) = 4\pi G \rho$$

Dit roept de vraag op: wat is het relativistische equivalent van de energiedichtheid? Is het een scalar, een vector, of iets anders?

2.13.1 Transformatie-eigenschappen: het voorbeeld van een stofwolk

Beschouw een volume $dx \cdot dy \cdot dz$ gevuld met niet-interagerende deeltjes die in rust zijn ten opzichte van elkaar - een zogenaamde **stofwolk**. In het ruststelsel S van deze wolk is de energiedichtheid:

$$\rho_0 = m_0 n_0$$

waarbij m_0 de rustmassa van een deeltje is en n_0 de getalsdichtheid.

In een ander referentiekader S' , dat met een snelheid v in de x -richting beweegt, levert de Lorentz-transformatie:

- Massa: $m_0 \rightarrow m_0 \gamma$,
- Dichtheid: $n_0 \rightarrow n_0 \gamma$ (wegens lengtecontractie)
- Dus: $\rho = \rho_0 \gamma^2$

Aangezien ρ **niet invariant** is, kan het geen scalar zijn. Het is ook **geen component van een viervector**, want dan zou het slechts lineair met γ transformeren. De transformatie γ^2 suggereert dat ρ zich gedraagt als een component van een **rank-2 tensor** - namelijk als de tt -component van een symmetrische tensor.

2.13.2 De energie-impuls-tensor van stof

De viersnelheidsvector van de stofwolk in S' is:

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \frac{dt}{\partial \tau} = v^\mu \frac{dt}{\partial \tau} = v^\mu u^t$$

$$u^\mu = \gamma(1, v) = \begin{pmatrix} \gamma \\ v_x \gamma \\ v_y \gamma \\ v_z \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^t \\ v_x u^t \\ v_y u^t \\ v_z u^t \end{pmatrix}$$

Met $u^t = \gamma$, en wetende dat de energie van elk deeltje $p^t = mu^t$ is, geldt voor de totale energiedichtheid:

$$\rho = np^t = (n_0 u^t)(mu^t) = (n_0 m) u^t u^t = \rho_0 (u^t)^2$$

Dit suggereert dat ρ de tt -component is van een rank-2 tensor van de vorm:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

Deze tensor is **symmetrisch** ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$) en wordt de **energie-impuls-tensor** genoemd, ook wel de **stress-energie-tensor** voor stof.

Deze tensor vormt de schakel tussen materie/energie en de kromming van de ruimte-tijd in de veldvergelijkingen van Einstein. In latere hoofdstukken zullen we zien hoe deze tensor voorkomt aan de rechterkant van Einsteins vergelijkingen.

2.13.3 Fysische Betekenis van de Energie-Impuls-Tensor

De energie-impuls-tensor is een tweede-orde tensor, wat betekent dat hij 16 componenten bevat in de vorm van een 4x4-matrix:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{tt} & T^{tx} & T^{ty} & T^{tz} \\ T^{xt} & T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yt} & T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zt} & T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{pmatrix}$$

Zoals eerder besproken, representeert T^{tt} de energiedichtheid, oftewel de dichtheid van relativistische massa. Maar wat betekenen de andere 15 componenten fysisch?

2.13.4 Tijd-ruimte-componenten: energiestroom

Laten we eerst de component T^{tx} bekijken. Uit de definitie:

$$T^{tx} = \rho_0 u^t u^x = (n_0 m) u^t u^x = (n_0 u^t)(mu^x) = (n_0 u^t)(mu^t) v_x = np^t v_x$$

We kunnen dit herschrijven als:

$$T^{tx} = \frac{nAv_x dt \cdot p^t}{Adt}$$

Hierbij representeert $Av_x dt$ het volume stof dat gedurende het tijdsinterval dt door een oppervlak A beweegt, loodrecht op de x-richting. Dit volume komt overeen met het aantal deeltjes dat door dat oppervlak passeert. Dus:

T^{tx} is de **energieflux** per oppervlakte-eenheid per tijdseenheid in de x-richting.

Op dezelfde manier representeren:

- T^{ty} : de energiestroom in de y-richting
- T^{tz} : de energiestroom in de z-richting

Omdat $T^{\mu\nu}$ symmetrisch is ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$), geldt:

$$T^{xt} = T^{tx}, \quad T^{yt} = T^{ty}, \quad T^{zt} = T^{tz}$$

2.13.5 Tijd-ruimte-componenten: impulsstromen (stress)

Beschouwen we nu de componenten met beide indices ruimtelijk, dus T^{kl} met $k, l \in \{x, y, z\}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} T^{kl} &= \rho_0 u^k u^l = (n_0 m) u^k u^l = (n_0 m) u^t v_k u^l \\ &= (n_0 u^t) v_k (m u^l) = n v_k (m u^l) = n v_k p^l \end{aligned}$$

Opnieuw kunnen we dit schrijven als:

$$T^{kl} = \frac{nAv_k dt \cdot p^l}{Adt}$$

Hier is $nAv_k dt$ het volume dat in de richting k door oppervlak A stroomt, en dus is T^{kl} de **flux van impulscomponent p^l in de richting k** .

Bijvoorbeeld:

- T^{xz} : flux van z-impuls in x-richting
- T^{xy} : flux van y-impuls in x-richting
- T^{zz} : flux van z-impuls in z-richting (druk)

Omdat de tensor symmetrisch is, geldt ook:

$$T^{xz} = T^{zx}, \quad T^{xy} = T^{yx}, \quad T^{yz} = T^{zy}, \dots$$

2.13.6 Samenvattend:

- T^{tt} = energiedichtheid
- T^{ti} of T^{it} = energiestroom in richting i
- T^{ij} = flux van impuls j in richting i (stress, druk en schuifspanning)

Deze interpretatie maakt duidelijk waarom $T^{\mu\nu}$ het juiste object is om de **volledige fysische inhoud** van een systeem te beschrijven - van energie- en massadichtheid tot impulsstromen en spanningen - en dus als bron van zwaartekracht in de algemene relativiteit fungeert.

2.13.7 Covariante Differentiatie van de Energie-Impuls-Tensor

In de platte ruimte-tijd van de Speciale Relativiteitstheorie kunnen de wetten van behoud van energie en impuls - oftewel het feit dat energie en impuls niet verloren gaan of ontstaan - wiskundig worden uitgedrukt als:

$$0 = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \partial^\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu}$$

Deze uitdrukking is een direct gevolg van **Noether's stelling**, toegepast op de translatie-invariantie van ruimte en tijd: de wetten van de natuur veranderen niet als we het systeem een stukje verplaatsen in ruimte of tijd. Deze symmetrie leidt tot behoud van impuls en energie.

2.13.8 Van Platte naar Gekromde Ruimte-tijd

In de algemene relativiteitstheorie beschrijven we fysica in een gekromde ruimte-tijd, waarin gewone afgeleiden niet volstaan. We vervangen daarom de partiële afgeleide door de **covariante afgeleide**:

$$\partial_\nu \rightarrow \nabla_\nu$$

Toegepast op de energie-impuls-tensor levert dit:

$$0 = \nabla_\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu}$$

Deze vergelijking is een tensorvergelijking en is daarom **algemeen covariant** - dat wil zeggen, geldig in elk coördinatenstelsel, vlak of gekromd. Dit maakt het een natuurlijke kandidaat voor een fundamenteel behoudsprincipe binnen de algemene relativiteit.

2.14 Einstein Tensor

De Poisson-vergelijking voor het zwaartekrachtsveld in de klassieke (Newtoniaanse) mechanica luidt als volgt (zie [vergelijking appendix 5 16](#)):

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi) = 4\pi G \rho$$

Waarbij Φ het zwaartekrachts-potentiaal is, en ρ de massadichtheid.

Ons doel is nu het vinden van een relativistische generalisatie van deze vergelijking. Zoals we in hoofdstuk [2.13.3](#) hebben gezien, wordt de klassieke massadichtheid ρ in de algemene relativiteit vervangen door de energie-impuls-tensor $T^{\mu\nu}$. Deze tensor beschrijft niet alleen massa, maar ook energie, impuls en druk - alle vormen van energie-inhoud van de ruimte-tijd.

Het ligt dan voor de hand om te veronderstellen dat de relativistische veldvergelijking van Einstein de volgende vorm moet hebben:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

Hierbij is $G^{\mu\nu}$ de **Einstein-tensor** en κ een nog te bepalen constante. De Einstein-tensor bevat alle informatie over de kromming van de ruimte-tijd en vervult de rol van de linkerkant van de veldvergelijking.

2.14.1 Eisen aan de Einstein-tensor

Op basis van de fysische en wiskundige vereisten waaraan de veldvergelijking moet voldoen, moet de Einstein-tensor $G^{\mu\nu}$ aan de volgende eigenschappen voldoen:

- Hij moet **verdwijnen in vlakke ruimte-tijd**, zoals $\vec{g} = 0$ in de afwezigheid van massa.
- Hij moet de **ruimte-tijdkromming beschrijven** op een manier die **lineair afhankelijk is van de Riemann-krommingstensor**.
- Hij moet een **symmetrische rang-2 tensor** zijn, net als $T^{\mu\nu}$.
- Hij moet een **nulpuntdivergentie** hebben: $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$, zodat de wet van behoud van energie en impuls behouden blijft ($\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$).
- In de **Newtoniaanse limiet** moet hij terugvallen op de Poisson-vergelijking: $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$.

In het volgende hoofdstuk zullen we de concrete vorm van de Einstein-tensor afleiden, die voldoet aan al deze voorwaarden.

2.14.2 Eerste Poging met de Ricci-Tensor als Oplossing

Zoals we in hoofdstuk 2.8 hebben gezien, is het zwaartekrachts-potentiaal Φ gekoppeld is aan de 00-component van de metriek via:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \Phi = -\overrightarrow{grad} \Phi \quad \text{met} \quad \Phi = \frac{c^2 h_{00}}{2} \quad (1)$$

Het lijkt dan logisch om te zoeken naar een tensor die - net als de Laplaciaan - tweede afgeleiden van de metriek bevat. De Riemann-tensor voldoet hieraan, en is bovendien de enige bekende tensor die de ruimte-tijd kromming op fundamentele wijze beschrijft.

Omdat we een rang-2 tensor nodig hebben (zoals vereist in de Einstein-veldvergelijking), is het zinvol om eerst te kijken naar de gecontracteerde vorm van de Riemann-tensor: de **Ricci-tensor**. We herinneren ons:

$$R^\alpha_{\mu\sigma\nu} = \left(\frac{d\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{dx^\sigma} - \frac{d\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}}{dx^\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\sigma} \right) \quad (2)$$

Door contractie op de bovenste en derde index krijgen we de Ricci-tensor:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad (3)$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \left(\frac{d\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{dx^\alpha} - \frac{d\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{dx^\nu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\alpha} \right) \quad (4)$$

In de Newtoniaanse limiet, voor een zwak en statisch gravitatieveld, draagt slechts één term bij aan R_{00} . We vinden:

$$R_{00} = R^\alpha_{00\alpha} = \Gamma^\alpha_{00,\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} + \mathcal{O}(h^2) = \Gamma^i_{00,i}$$

Aangezien we ons beperken tot een statisch veld, verdwijnt de tijdsafgeleide en blijft over:

$$R_{00} = \Gamma^i_{00,i}$$

Gebruikmakend van het eerder afgeleide resultaat voor het Christoffel-symbool in deze benadering:

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} g^{ij} g_{00,j} \approx \frac{1}{2} \partial_i h_{00}$$

Met de benadering $g^{ij} = \eta^{ij}$ en $g_{00,j} = h_{00,j}$ volgt:

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{ij} h_{00,j} = \frac{1}{2} \delta^i_j h_{00,j}$$

$$\Gamma^i_{00,i} = \frac{1}{2} \delta^i_j h_{00,ij} = \frac{1}{2} h_{00,ii}$$

$$R_{00} = \Gamma^i_{00,i} = \frac{1}{2} (\partial_1^2 h_{00} + \partial_2^2 h_{00} + \partial_3^2 h_{00})$$

Invullen van $h_{00} = 2\Phi/c^2$ geeft:

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

En dus:

$$R_{00} = \frac{4\pi G \rho}{c^2}$$

Dit resultaat suggereert dat een veldvergelijking van de vorm:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

zou kunnen voldoen aan de Newtoniaanse limiet, met $\kappa = 8\pi G/c^4$ als kandidaat-constante.

Einstein was in 1915 inderdaad aanvankelijk overtuigd van deze vergelijking. Hiermee loste hij zelfs het al jaren onopgeloste probleem van de precessie van het perihelium van Mercurius op. In een brief schreef hij enthousiast:

“Een paar dagen was ik buiten mezelf van vreugdevolle opwindung.”

Toch moest hij deze eerste poging uiteindelijk verwerpen. De reden was dat de Ricci-tensor in het algemeen **geen nulpuntdivergentie** heeft, terwijl de energie-impuls-tensor $T_{\mu\nu}$ dat wél heeft ($\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$). Hierdoor kon deze vorm niet voldoen aan het vereiste behoud van energie en impuls.

2.14.3 Tweede Poging

Er bestaat een tensor die nauw verwant is aan de Ricci-tensor en die geschikt is als linkerkant van de Einstein-veldvergelijkingen: de **Einstein-tensor**. Deze wordt gedefinieerd als:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}$$

Hierbij $R = R^\alpha_\alpha$ de **Ricci-scalar**, oftewel de scalaire kromming.

Deze tensor voldoet alvast aan meerdere vereisten:

- Hij is **symmetrisch**, zoals vereist door de symmetrie van $T^{\mu\nu}$;
- Hij is van **rang 2**;
- Hij beschrijft de **ruimte-tijdkromming**, aangezien hij direct is opgebouwd uit de Ricci-tensor en dus indirect uit de Riemann-tensor.

Wat nog aangetoond moet worden, is dat de **covariante divergentie** van de Einstein-tensor nul is:

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$$

Dit is essentieel, want alleen dan kan hij op consistente wijze worden gekoppeld aan de energie-impuls-tensor $T^{\mu\nu}$, waarvoor eveneens geldt $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ (zie hoofdstuk [2.13.2](#)). (zie ook hoofdstuk [2.5.2](#), vergelijking [15](#)).

We leiden dit resultaat af met behulp van de **Bianchi-identiteit**, die luidt:

$$\nabla_{\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0$$

We vermenigvuldigen deze identiteit met de metriektermen $g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$. Omdat de afgeleiden van de metriek in een lokaal inertiaal stelsel nul zijn, mogen deze factoren naar binnen worden verplaatst:

$$\nabla_{\sigma} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}) + \nabla_{\nu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu}) + \nabla_{\mu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\sigma}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma} (g^{\gamma\sigma} R) + \nabla_{\nu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu}) + \nabla_{\mu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\sigma}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma} (g^{\gamma\sigma} R) + \nabla_{\nu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\sigma\mu\alpha\beta}) + \nabla_{\mu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\nu\sigma\alpha\beta}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma} (g^{\gamma\sigma} R) - \nabla_{\nu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\mu\sigma\alpha\beta}) - \nabla_{\mu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\nu\sigma\beta\alpha}) = 0$$

Door gebruik te maken van de definitie van de Ricci-tensor $R^{\mu\nu} = g^{\mu\beta} g^{\nu\sigma} R_{\beta\sigma}$ (stap 3) en door de indices te hernoemen (stap 4), krijgen we:

$$\nabla_{\sigma} (g^{\gamma\sigma} R) - \nabla_{\nu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\mu\sigma\alpha\beta}) - \nabla_{\mu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\nu\sigma\beta\alpha}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma} (g^{\gamma\sigma} R) - \nabla_{\nu} (g^{\gamma\sigma} g^{\beta\nu} R_{\sigma\beta}) - \nabla_{\mu} (g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} R_{\sigma\alpha}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma} (g^{\gamma\sigma} R) - \nabla_{\nu} (R^{\gamma\nu}) - \nabla_{\mu} (R^{\gamma\mu}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma} (g^{\gamma\sigma} R) - \nabla_{\sigma} (R^{\gamma\sigma}) - \nabla_{\sigma} (R^{\gamma\sigma}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma} (g^{\gamma\sigma} R) - 2\nabla_{\sigma} (R^{\gamma\sigma}) = 0$$

$$\nabla_{\sigma} (2R^{\gamma\sigma} - g^{\gamma\sigma} R) = 0$$

Of herschreven:

$$\nabla_{\sigma} \left(R^{\gamma\sigma} - \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} R \right) = 0$$

En dus:

$$\nabla_{\nu} G^{\mu\nu} = 0$$

2.14.4 Conclusie

De Einstein-tensor $G^{\mu\nu}$ is de juiste keuze voor de linkerkant van de veldvergelijking. Hij is symmetrisch, opgebouwd uit de ruimte-tijd kromming, en voldoet aan het behoud van energie en impuls door zijn nuldivergentie. Daarmee is de vergelijking:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

een solide kandidaat voor de algemene relativistische generalisatie van de zwaartekrachtswetten.

2.15 Einstein-Veldvergelijkingen

In de vorige twee hoofdstukken hebben we de twee grootheden afgeleid die de kern vormen van de veldvergelijkingen in de algemene relativiteitstheorie:

- De **Einstein-tensor** $G^{\mu\nu}$, die de ruimte-tijd kromming beschrijft, en
- De **energie-impuls-tensor** $T^{\mu\nu}$, die de materie-energie-inhoud van de ruimte-tijd representeert.

Deze twee grootheden zijn gekoppeld in de vorm:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

waarbij κ een nog te bepalen constante is.

2.15.1 Doel: herstel van Newton in de zwakveldlimiet

Om de waarde van κ te vinden, eisen we dat deze vergelijking in de **Newtoniaanse limiet** (zwakke, statische velden en lage snelheden) reduceert tot de klassieke zwaartekrachtwet van Newton. Dit zorgt ervoor dat de algemene relativiteitstheorie in overeenstemming is met de klassieke theorieën in hun toepassingsgebied.

2.15.2 Alternatieve formulering van de veldvergelijking

Einstein heeft de veldvergelijkingen ook in een alternatieve, equivalent vorm geschreven. Deze luidt:

$$G_{im} = -\chi \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \quad (2a)$$

waarbij:

- χ een constante is (verwant aan κ),
- $T = T^\sigma_\sigma$ de **spoortensor** (trace) van $T_{\mu\nu}$ is, oftewel de contractie van de tensor,
- en de rechterkant als geheel weer een tensor van rang 2 vormt.

Deze formulering werd door Einstein gebruikt in zijn beroemde artikel “*Die Feldgleichungen der Gravitation*”, ingediend op 25 november 1915 bij de Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften. Daarin schrijft hij:

„Ist in dem betrachteten Raume ‘Materie’ vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite von (2) [...] auf. Wir setzen

$$G_{im} = -\chi \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right)$$

T ist der Skalar des Energietensors der ‘Materie’, die rechte Seite von (2) ein Tensor.“

2.15.2.1 Samenvattend

De volledige vorm van de veldvergelijkingen van Einstein luidt dus:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Of equivalent:

$$G_{\mu\nu} = -\chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

In de volgende sectie zullen we de constante κ bepalen door de vergelijking toe te passen op het Newtoniaanse limiet. Dit zal ons toelaten om de verbinding te leggen met de klassieke zwaartekrachtwet en zo de algemene relativiteitstheorie in zijn definitieve vorm vast te leggen.

2.15.2.2 De Alternatieve Vorm van Einsteins Vergelijking

We vertrekken vanuit de standaardvorm van de veldvergelijking:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}$$

Door beide zijden van deze vergelijking te vermenigvuldigen met $g_{\mu\nu}$, verkrijgen we:

$$g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R = \kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

Volgens de definities van contractie geldt:

$$g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = R \quad \text{en} \quad g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T$$

Daarmee wordt de vergelijking:

$$R - \frac{1}{2} R \cdot g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \kappa T$$

Aangezien $g^{\mu\nu}$ de inverse is van $g_{\mu\nu}$, is hun product de Kronecker-delta δ_v^μ . Door deze tensor te contracteren (d.w.z. de som over de diagonale elementen te nemen), krijgen we:

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_v^v = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

De vergelijking reduceert dan tot:

$$R - \frac{1}{2} R \times 4 = \kappa T$$

$$R - 2R = \kappa T$$

$$R = -\kappa T$$

We kunnen deze uitdrukking voor R nu invullen in de oorspronkelijke Einsteinvergelijking:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \times (-\kappa T) = \kappa T^{\mu\nu}$$

Wat leidt tot:

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa g^{\mu\nu} T &= \kappa T^{\mu\nu} \\ \Rightarrow R^{\mu\nu} &= \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} T \right) \end{aligned}$$

We kunnen dit vervolgens herschrijven door beide zijden met $g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}$ te vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} R^{\mu\nu} &= g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} T \right) \\ \Rightarrow R_{\alpha\beta} &= \kappa \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} T \right) \end{aligned}$$

Als we de indices vervangen door $\mu\nu$, krijgen we de alternatieve vorm:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} T \right) \\ \Rightarrow R_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa g_{\mu\nu} T \end{aligned}$$

Gezien eerder $R = -\kappa T$, kunnen we dit ook schrijven als:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R$$

Wat resulteert in:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

2.15.2.3 Conclusie

Deze afleiding bevestigt de consistentie van Einsteins veldvergelijking en zijn equivalentie met de alternatieve formulering die in zijn originele publicatie werd voorgesteld. Beide vormen leiden tot dezelfde fysische voorspellingen, maar de alternatieve notatie wordt vaak gebruikt vanwege haar symmetrie en eenvoud in toepassingen.

2.15.3 Newtoniaanse Limiet

In het vorige hoofdstuk zagen we al dat in de limiet van zwakke velden en lage snelheden de R_{00} -component van de Riemann-tensor benaderd kan worden als:

$$R_{00} \approx \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

Bovendien geldt dat wanneer de metriek $g_{\mu\nu}$ gereduceerd wordt tot de Minkowski-metriek $\eta_{\mu\nu}$ van vlakke ruimte-tijd, we de Ricci-tensorcomponent als volgt kunnen benaderen:

$$R^{\mu\nu} \equiv g^{0\mu} g^{0\nu} R_{\mu\nu} \approx \eta^{0\mu} \eta^{0\nu} R_{\mu\nu} = (-1)(-1)R_{00} = R_{00}$$

Gecombineerd geeft dit:

$$R_{00} \approx \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi = \frac{4\pi G \rho}{c^2}$$

In deze Newtoniaanse limiet is de enige niet-verwaarloosbare component van de energie-impuls-tensor $T^{\mu\nu}$ de component $T^{00} = \rho c^2$. Dit volgt uit de uitdrukking:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad \text{met} \quad u^i \ll u^0 = c$$

We kunnen dan de getraceerde tensor benaderen als:

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \approx g_{00} T^{00} \approx \eta_{00} T^{00} = T^{00} = \rho c^2$$

We passen nu de 00-component van de Einstein-vergelijking toe:

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T \right)$$

Invullen geeft:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi G \rho}{c^2} &= \kappa \left(\rho c^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \rho c^2 \right) \\ \Rightarrow \frac{4\pi G \rho}{c^2} &= \frac{1}{2} \kappa \rho c^2 \end{aligned}$$

Daaruit volgt:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

We kunnen nu de Einstein-veldvergelijkingen formuleren in hun standaard- en alternatieve vormen:

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}}$$

Of:

$$\boxed{R^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right)}$$

En in verlaagde indexnotatie:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Of:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

2.15.3.1 Opmerking 1:

De constante $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ heeft een extreem kleine waarde:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 2.071 \times 10^{-43} s^2 m^{-1} kg^{-1}$$

Dit betekent dat de ruimte-tijd buitengewoon ‘stijf’ is: slechts enorme hoeveelheden massa of energie veroorzaken merkbare kromming.

2.15.3.2 Opmerking 2:

Ondanks het relatief eenvoudige uiterlijk van de Einsteinvergelijkingen, zijn ze in werkelijkheid uiterst complex. Voor een gegeven verdeling van materie en energie (in de vorm van $T^{\mu\nu}$), vormen de vergelijkingen een systeem van tien gekoppelde, niet-lineaire, tweede-orde partiële differentiaalvergelijkingen voor de metriek $g^{\mu\nu}$. Deze tien vergelijkingen corresponderen met de tien onafhankelijke componenten van de symmetrische metriek.

2.15.3.3 Opmerking 3:

De niet-lineariteit van de Einsteinvergelijkingen heeft een diepe fysische betekenis. Ze reflecteert het zelf-referentiële karakter van de zwaartekracht: de ruimte-tijd beïnvloedt materie en energie, maar wordt tegelijk ook beïnvloed door diezelfde materie en energie. Zoals Kevin Brown opmerkt in *Reflection on Relativity*:

“De zelf-referentiële aard van de metrische veldvergelijkingen komt ook tot uiting in hun niet-lineariteit. Dit is onvermijdelijk voor een theorie waarin de metrische relaties tussen entiteiten hun 'posities' bepalen, en die posities op hun beurt de metriek beïnvloeden.”

De niet-lineariteit impliceert ook de mogelijkheid van interactie tussen zwaartekrachtsvelden zelf (zoals via graviton-uitwisseling), wat bijvoorbeeld in het lineaire Maxwell-formalisme van elektromagnetisme niet mogelijk is voor fotonen.

2.15.3.4 Opmerking 4:

De Einsteinvergelijkingen leggen slechts zes onafhankelijke beperkingen op aan de tien componenten van de metriek $g^{\mu\nu}$. De resterende vier vrijheidsgraden hangen samen met de vrijheid om coördinaten te kiezen: we kunnen vier willekeurige functies specificeren via de coördinaten $x^\alpha(P)$. Deze overbepaling is een direct gevolg van het feit dat de Einstein-tensor $G^{\mu\nu}$ een nulpuntdivergentie heeft: $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

2.15.4 Kernpunten en Intuïtie

- De **Einstein-veldvergelijkingen** koppelen de **ruimte-tijd kromming** aan de **energie-impuls-inhoud**:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

- De linkerkant, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$, is de **Einstein-tensor**, die de geometrie encodeert.
- De rechterkant bevat de **energie-impuls-tensor** $T_{\mu\nu}$, die massa, energie, druk en stromen beschrijft.
- De constante κ wordt afgeleid door de vergelijkingen te laten overeenkomen met Newtons gravitatiewet in de zwakke-veld-limiet:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

- Een alternatieve, volledig equivalente formulering van de veldvergelijking is:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

waarin $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ de **trace** van de energie-impulstensor is.

- Door contractie van beide zijden van de standaardvorm volgt $R = -\kappa T$, wat consistent is met de alternatieve formulering.

Intuïtief

Stel je ruimte-tijd voor als een flexibel maar stug **vierdimensionaal weefsel**. De Einsteinvergelijkingen vertellen hoe dat weefsel **vervormd wordt door de aanwezigheid van massa en energie**.

Net als een matras die indeukt onder een zware kogel, vervormt ruimte-tijd rond massa's. Maar in plaats van een duw of kracht, is die vervorming **een geometrisch effect** dat bepaalt hoe objecten bewegen - ook als ze "vrij" vallen.

De vergelijking $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ zegt dan:

- Wat er in de ruimte-tijd aanwezig is** (materie, energie, straling),
- bepaalt hoe de ruimte-tijd zelf eruitziet** (kromt, strekt, draait).

Bij zwakke velden en lage snelheden volgt hieruit automatisch de klassieke zwaartekrachtvergelijking van Newton - een cruciale test voor elke relativistische theorie.

2.15.5 Tabel: Belangrijke grootheden in de Einstein-veldvergelijkingen

Grootheid	Betekenis / Rol
-----------	-----------------

Grootheid	Betekenis / Rol
$R_{\mu\nu}$	Ricci-tensor: samengevatte kromming
R	Ricci-scalar: totale kromming
$g_{\mu\nu}$	Metriek: meetstructuur van ruimte-tijd
$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$	Einstein-tensor: meet geometrische vervorming
$T_{\mu\nu}$	Energie-impulstensor: verdeling van energie en materie
$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$	Spoor (trace) van $T_{\mu\nu}$: scalaire energiedichtheid
$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$	Koppelingsconstante tussen geometrie en fysica

2.16 Samenvatting van de Eindformule voor de Algemene Relativiteitstheorie

In de voorgaande hoofdstukken hebben we stap voor stap de afleiding van de Einstein-veldvergelijkingen (EVV) besproken. Daarbij kwamen alle noodzakelijke bouwstenen aan bod, zoals de Riemann-tensor, de Ricci-tensor, de Ricci-scalar, de energie-impuls-tensor, en het gebruik van covariante afgeleiden. In dit afsluitende hoofdstuk vatten we het eindresultaat samen en lichten we de fysische betekenis ervan toe.

2.16.1 Het fundamentele inzicht van Einstein

Einsteins centrale idee was dat zwaartekracht géén kracht is in de klassieke zin, maar het gevolg van de kromming van ruimte-tijd. Deze kromming wordt veroorzaakt door de aanwezigheid van massa en energie. Zijn doel was een wiskundige formule te vinden die deze relatie beschrijft: hoe massa en energie de geometrie van ruimte-tijd beïnvloeden.

De algemene vorm van de veldvergelijking

Zonder de volledige afleiding opnieuw te doorlopen, presenteren we hier het eindresultaat van Einsteins theorie:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (4)$$

De term $\lambda g_{\mu\nu}$ bevat de zogenaamde **kosmologische constante** ($\lambda = 1.1056 \times 10^{-52} m^{-2}$), die pas bij kosmologische schalen merkbaar wordt. Voor de meeste toepassingen in de astrofysica en klassieke relativiteit kunnen we deze term negeren, zodat de vergelijking vereenvoudigt tot:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (5)$$

De **linkerkant** van deze vergelijking beschrijft de geometrie (de kromming) van ruimte-tijd, terwijl de **rechterkant** de inhoud van de ruimte (massa, energie en impuls) representeert.

In deze vergelijking staat c voor de lichtsnelheid ($2.99792458 \cdot 10^8$ m/s) en G is de bekende zwaartekrachtsconstante $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$.

2.16.2 Vacuüm: buiten een massa

In een gebied zonder massa of energie geldt $T_{\mu\nu} = 0$. De veldvergelijking reduceert dan tot:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (6)$$

Zoals besproken in hoofdstuk [2.15.2.2](#) De Alternatieve Vorm van Einsteins Vergelijking geldt in dat geval bovendien:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T = 0 \Rightarrow R = 0$$

Zodat overblijft:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (7)$$

Dit zijn de zogenaamde vacuümvergelijkingen van Einstein.

2.16.3 Uitleg van de gebruikte objecten

De indexen μ en ν lopen van 0 tot 3 en verwijzen naar de vier dimensies van de ruimte-tijd: tijd (0) en ruimte (1 = x, 2 = y, 3 = z).

Vergelijking (5) bevat dus 16 componentvergelijkingen:

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}, & R_{01} - \frac{1}{2} g_{01} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{01}, & R_{02} - \frac{1}{2} g_{02} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{02}, & R_{03} - \frac{1}{2} g_{03} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{03} \\ R_{10} - \frac{1}{2} g_{10} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{10}, & R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{11}, & R_{12} - \frac{1}{2} g_{12} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{12}, & R_{13} - \frac{1}{2} g_{13} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{13} \\ R_{20} - \frac{1}{2} g_{20} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{20}, & R_{21} - \frac{1}{2} g_{21} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{21}, & R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{22}, & R_{23} - \frac{1}{2} g_{23} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{23} \\ R_{30} - \frac{1}{2} g_{30} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{30}, & R_{31} - \frac{1}{2} g_{31} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{31}, & R_{32} - \frac{1}{2} g_{32} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{32}, & R_{33} - \frac{1}{2} g_{33} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{33} \end{aligned}$$

Door symmetrie (namelijk $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$) zijn er slechts 10 onafhankelijk.

De Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$ wordt vaak in matrixvorm genoteerd als:

$$R_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{30} & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

De **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$, die de meetkundige structuur van ruimte-tijd bevat, heeft eveneens 10 onafhankelijke componenten en bepaalt de ruimte-tijdgeometrie volledig:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

De Ricci-scalar R volgt uit de contractie van de Ricci-tensor met de inverse metriek:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Alle elementen aan de linkerkant van vergelijking (5) beschrijven de geografie van de beschouwde ruimte-tijd. Aan de rechterkant vinden we de **energie-impuls-tensor** $T_{\mu\nu}$, die bevat alle informatie over materie en energie in het systeem:

$$T_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

Hierin staat T_{00} voor de energiedichtheid, T_{0i} voor de energiestroom en T_{ij} voor de impulsvloei en drukcomponenten.

2.16.4 Bepaling van $R_{\mu\nu}$

De Ricci-tensor wordt berekend via contractie van de Riemann-tensor:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} \quad (\text{opmerking 1})$$

Deze tensor hangt af van de **Christoffel-symbolen**, die zelf uit afgeleiden van de metriek bestaan::

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} \quad (\text{opmerking 1})$$

Hieruit blijkt dat de volledige geometrie (en dus ook de zwaartekracht) afhangt van de metriek $g_{\mu\nu}$ en haar afgeleiden.

2.16.5 De Schwarzschild-oplossing

In 1915 vond Karl Schwarzschild een exacte oplossing van de veldvergelijkingen in vacuüm rondom een bolsymmetrische massa. Dit leidde tot de bekende **Schwarzschild-metriek** (zie hoofdstuk [3](#)):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Deze metriek geldt buiten de massa, dus in een gebied waar $T_{\mu\nu} = 0$ en dus:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

De Schwarzschild-oplossing is bijzonder belangrijk omdat zij experimenteel verifieerbare voorspellingen doet, zoals de ombuiging van licht en de perihelium-precessie van Mercurius.

De metrische tensor bestaat dan uit de elementen:

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), \quad g_{11} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Dit is het zogenaamde *spoor* van de tensor. Of in tensorvorm:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}$$

Dus omdat de Schwarzschild-vergelijking buiten een massa wordt gebruikt, wordt de rechterkant van de Einstein-veldvergelijkingen nul ($T_{\mu\nu} = 0$). Hierdoor gaan de veldvergelijkingen dan over in vergelijking (6), en omdat R is afgeleid van $R_{\mu\nu}$, kan vergelijking (6) alleen nul zijn wanneer $R_{\mu\nu} = 0$. Dus de enige relevante vergelijking is $R_{\mu\nu} = 0$. Zoals eerder vermeld, is de tensor $R_{\mu\nu}$ opgebouwd uit Christoffel-symbolen en hun afgeleiden. Alle relevante Christoffel-symbolen voor deze metriek hebben we afgeleid en samengevat in [Appendix 1.2](#).

De Schwarzschild-vergelijking gebruikt het sferische coördinatenstelsel om de volledige ruimte-tijd te beschrijven; echter, door behoud van impulsmoment vindt fysieke beweging plaats in één vlak. Door het juiste sferische coördinatenstelsel te kiezen, kan dit vlak zo worden gedraaid dat het equatoriale vlak samenvalt met het onderzochte oppervlak. In dat geval wordt de hoek $\theta = \pi/2$, waarbij de metrische tensor verder vereenvoudigd tot:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{vmatrix}$$

(Zie ook hoofdstuk [7.3 "Antwoord op vragen betreffende Schwarzschild"](#))

2.16.5.1 Opmerking 1

In zijn document gebruikt Einstein voor het Christoffel-symbool $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ een tegenovergesteld teken, en ook de Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$ heeft een tegenovergesteld teken voor de derde en vierde term aan de rechterkant van de vergelijking. Voor de metriek hebben wij de zogenaamde (+ - - -) notatie gebruikt, ook wel bekend als de West Coast-conventie.

2.16.5.2 Slotopmerking

De Einstein-veldvergelijkingen vormen een krachtig systeem van 10 gekoppelde, niet-lineaire, partiële differentiaalvergelijkingen. Hoewel ze compact kunnen worden geschreven, zijn ze inhoudelijk rijk en complex.

Ze vormen het vertrekpunt voor het zoeken naar oplossingen (zoals de Schwarzschild-oplossing, kosmologische modellen) en verklaren een breed scala aan natuurkundige fenomenen - van de baan van Mercurius tot de uitdijing van het heelal.

Zoals vaak gezegd:

"Massa en energie bepalen de kromming van ruimte-tijd, en de kromming van ruimte-tijd bepaalt de beweging van massa en energie."

2.16.6 Kernpunten en Intuïtie

- Einsteins centrale inzicht: **zwaartekracht is geen kracht**, maar het gevolg van **kromming van ruimte-tijd**, veroorzaakt door **massa en energie**.
- De **Einstein-veldvergelijkingen** vormen het fundament van de algemene relativiteitstheorie:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Voor de meeste praktische toepassingen wordt de kosmologische constante $\lambda \approx 1.1 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ genegeerd. Dan reduceert de vergelijking tot:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- In vacuüm (buiten de materie): $T_{\mu\nu} = 0$, dus:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

dit zijn de **vacuümvergelijkingen**, die o.a. leiden tot de **Schwarzschild-oplossing**

- Elke term op de **linkerkant** is zuiver geometrisch (afgeleid uit de metriek $g_{\mu\nu}$); de **rechterkant** bevat fysische informatie (energie, massa, druk).

Intuïtief

Stel je een **vierdimensionaal elastisch weefsel** voor. Materie en energie trekken aan dat weefsel en zorgen voor vervorming. Die vervorming bepaalt hoe objecten zich bewegen - **ze volgen de kromming** van ruimte-tijd.

De vergelijking zegt:

- Links: *“hoe is ruimte-tijd gekromd?”*
- Rechts: *“wat zit er in de ruimte-tijd dat die kromming veroorzaakt?”*

Bijvoorbeeld:

- Een planeet beweegt niet omdat ze wordt “getrokken” door een kracht,
- maar omdat ze een **geodeet volgt in een gekromde ruimte-tijd**.

De vergelijkingen zijn elegant én krachtig:

- Ze gelden overal (door tensorformaliteit),
- Reduceren tot Newtons zwaartekracht in het juiste limietgeval,
- En voorspellen fenomenen zoals zwaartekrachtsgolven, zwarte gaten en de uitdijing van het heelal.

Tabel: Structuur van de eindvergelijking

<u>Term</u>	<u>Betekenis</u>
$G_{\mu\nu}$	Geometrische kant: kromming
$T_{\mu\nu}$	Fysische kant: energie-inhoud
$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$	Structureel behoudprincipe
$\frac{8\pi G}{c^4}$	Schaalfactor die geometrie en fysica verbindt

Deze vergelijkingen vormen het sluitstuk van de wiskundige ruggengraat van de algemene relativiteit. Vanaf hier wordt het tijd om **oplossingen te zoeken** - bijvoorbeeld de Schwarzschild-oplossing of kosmologische modellen.

Grootheid	Betekenis / Rol
$R_{\mu\nu}$	Ricci-tensor: meet lokale kromming
R	Ricci-scalar: totale schaal van kromming (spoor van $R_{\mu\nu}$)
$g_{\mu\nu}$	Metriek: bepaalt de meetstructuur van ruimte-tijd
$\lambda g_{\mu\nu}$	Kosmologische constante (vooral relevant op kosmische schaal)
$T_{\mu\nu}$	Energie-impulstensor: verdeling van energie en materie
$T_{\mu\nu}$	Energie-impuls-tensor: beschrijft materie, energie, druk en stroming
$\frac{8\pi G}{c^4}$	Koppelingsconstante tussen geometrie en fysica

Deel III – Fysische Interpretaties

3 Schwarzschild-Metrick

Het werken met de Einstein-veldvergelijkingen is in het algemeen vrij complex vanwege hun algemene en tensoriële aard. Gelukkig vond Karl Schwarzschild in 1915 een exacte oplossing voor deze vergelijkingen in een specifiek geval: dat van een stationair, sferisch symmetrisch zwaartekrachtsveld in vacuüm. (Zie hoofdstuk [6](#) : [Controle of de Schwarzschild Metrick voldoet aan de Einstein Veldvergelijkingen](#))

Einstein beschouwde in zijn theorie alle mogelijke verdelingen van massa en energie. Schwarzschild beperkte zich daarentegen tot de situatie in het vacuüm, dat wil zeggen: buiten de materie, waar de energie-impulstensor nul is ($T_{\mu\nu} = 0$). Hij onderzocht het effect van een centrale, niet-roterende, sferisch symmetrische massa op de omringende ruimte-tijd – bijvoorbeeld de invloed van de zon op passerende planeten of lichtstralen. (Voor een uitgebreider overzicht, zie hoofdstuk [5.11](#) en de [Schwarzschild's: "On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory"](#).)

De door Schwarzschild gevonden metrick luidt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (8)$$

Deze metrick beschrijft de afstand tussen twee gebeurtenissen in een sferisch symmetrisch zwaartekrachtsveld in termen van de tijdcoördinaat t , de radiale afstand r , en de hoeken θ en ϕ . In een oneindig klein lokaal gebied kunnen we een lokaal inertiaalstelsel construeren waarin de coördinaten cdt , dr , $d\theta$ en $d\phi$ zich gedragen als lineaire, orthogonale grootheden. De metrische coëfficiënten zijn in zo'n lokaal vlak constant, maar variëren in het algemeen met r en θ .

Voor verdere beschouwingen over deze oplossing zie het volgende hoofdstuk.

Voor de volledige oorspronkelijke afleiding van de Schwarzschild-metrick: zie *Schwarzschild, On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*, 13 januari 1916, en het overzichtsartikel van Oas.

3.1 Besprekingen over de Schwarzschild-Metrick

3.1.1 Inleiding

De Schwarzschild-metrick is een exacte oplossing van de Einstein-veldvergelijkingen voor het geval van een sferisch symmetrische massa in vacuüm. Karl Schwarzschild publiceerde deze oplossing in 1915, kort na de formulering van de algemene relativiteitstheorie door Albert Einstein. Deze oplossing vormt een van de belangrijkste toepassingen van de theorie en beschrijft hoe massa de structuur van de ruimte-tijd beïnvloedt.

3.1.2 De Schwarzschild-metrick in sferische coördinaten

De Schwarzschild-vergelijking in sferische coördinaten luidt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

Hierin zijn:

- G de gravitatieconstante,
- M de massa,
- c de lichtsnelheid,
- t, r, θ, ϕ de tijd- en ruimtecoördinaten.

Deze metrick beschrijft de gekromde ruimte-tijd buiten een bolsymmetrische massa, waarbij aangenomen wordt dat er geen andere materie aanwezig is (vacuüm).

3.1.3 Dimensie-analyse

Op het eerste gezicht lijkt het alsof de dimensies van deze vergelijking niet kloppen. In werkelijkheid zijn de coëfficiënten dimensieloos, terwijl de coördinaten een lengte-afmeting hebben (in meter of m^2 voor het kwadraat). De betekenis van formule (1) is dus dat:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) d(c^2 t^2) - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - \frac{r^2}{R_p^2} d(R_p^2 \cdot \theta^2) - \frac{r^2}{R_p^2} \sin^2 \theta d(R_p^2 \cdot \phi^2)$$

met $R_p = 1$ meter. Hiermee wordt duidelijk dat de coördinaten r, θ, ϕ dimensioneel als lengtes behandeld worden, terwijl de bijhorende coëfficiënten dimensieloos blijven.

Om praktische redenen wordt meestal gewerkt met de oorspronkelijke vorm van vergelijking (1), maar het is belangrijk te beseffen dat $d\theta$ en $d\phi$ hier een lengte-dimensie krijgen via vermenigvuldiging met R_p .

3.1.4 Kernpunten en Intuïtie

- De Schwarzschild-oplossing werd in 1915 door **Karl Schwarzschild** gevonden als een **exacte oplossing van de Einstein-veldvergelijkingen** in het geval van een:
 - sferisch symmetrisch,
 - niet-roterend,
 - statisch massa-object in vacuüm $T_{\mu\nu} = 0$
- De metrick beschrijft hoe ruimte en tijd gekromd worden door een massa M , zoals een ster of planeet, **buiten de materie**.

- De metrieik luidt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

- Deze metrieik is weergegeven in **sferische coördinaten** (t, r, θ, ϕ) , aangepast aan de sferische symmetrie van het probleem
- De karakteristieke schaal is de **Schwarzschild-radius**:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

- Voor $r \rightarrow \infty$ benadert de metrieik de vlakke Minkowski-metrieik, zoals vereist voor asymptotische vlakheid in afwezigheid van massa..
- Nabij $r = r_s$ treden effecten op als **tijdsdilatatie**, **horizonvorming** en extreme kromming

Intuïtief

Stel je voor: een zware ster in de lege ruimte. In plaats van een krachtveld zoals bij Newton, zegt Einstein dat deze massa **de ruimte-tijd zelf vervormt**.

De Schwarzschild-metrieik laat zien **hoe sterk die vervorming is op verschillende afstanden**:

- **Tijdsdilatatie**: de klok tikt trager dichterbij de massa $\rightarrow$ bepaald door de factor:

$$g_{00} = 1 - \frac{r_s}{r} \text{ ook wel } g_{tt}$$

- **Radiale afstandsvervorming**: het meten van een afstand in de r -richting kost meer "fysieke ruimte" dan je denkt $\rightarrow$ bepaald door g_{11} :

$$g_{11} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \text{ ook wel } g_{rr}$$

- **Hoekcomponenten** (g_{22}, g_{33}) blijven klassiek: oppervlak van sferen met straal r .

"De Schwarzschild-oplossing is dus geen abstracte formule, maar een concreet meetbare vervorming van ruimte en tijd - zichtbaar in de loop van klokken en het gedrag van licht en planeten."

Tabeloverzicht

<u>Grootheid</u>	<u>Betekenis</u>
ds^2	Lijn-element: meetbare afstand tussen gebeurtenissen
g_{00}	Bepaalt tijdsdilatatie (hoe tijd verloopt in aanwezigheid van massa)
g_{11}	Bepaalt vervorming van radiale afstanden
$r_s = \frac{2GM}{c^2}$	Schwarzschild-radius (eventuele horizon voor zwart gat)
$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$	Sferisch oppervlakselement

3.2 Relatie van de Schwarzschild-metrick en Noether's stelling

3.2.1 Inleiding

Eén van de grote ontdekkingen in de moderne natuurkunde is dat er een diep verband bestaat tussen symmetrieën van de natuurwetten en behoudswetten. Dit verband werd in 1918 wiskundig vastgelegd door Emmy Noether. Haar stelling zegt dat iedere continue symmetrie van een fysisch systeem correspondeert met een behouden grootte.

De Schwarzschild-oplossing van Einsteins veldvergelijkingen vormt een ideaal laboratorium om dit principe te illustreren. Zij beschrijft de ruimtetijd rond een sferisch symmetrische, niet-roterende massa (zoals een ideaal zwart gat of een niet-roterende ster).

3.2.2 De Schwarzschild-metrick

De ruimtetijd wordt beschreven door de metrick:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

We zien direct dat deze metrick (d.w.z. de coëfficiënten):

- niet expliciet afhangt van t (tijdsonafhankelijk),
- niet expliciet afhangt van ϕ (rotatiesymmetrie),
- volledig sferisch symmetrisch is (invariant onder willekeurige ruimtelijke rotaties).

3.2.3 Symmetrieën en Killing-vectoren

In de algemene relativiteit worden symmetrieën van de metriek weergegeven door Killing-vectoren ξ^μ , die voldoen aan de **Killing-vergelijking**:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$$

Hierbij betekent ∇_μ de **covariante afgeleide** naar coördinaat x^μ . Deze houdt rekening met de kromming van de ruimtetijd en verschilt van de gewone partiële afgeleide ∂_μ . Voor een vectorveld geldt bijvoorbeeld:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda$$

waar $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ de Christoffel-symbolen zijn.

De grootheid ξ^μ stelt een **Killing-vectorveld** voor: een richting in de ruimtetijd langs welke de metriek niet verandert. Dit is de wiskundige manier om een symmetrie te beschrijven, bijvoorbeeld een tijdstranslatie of een rotatie.

Voor elke Killing-vector geldt langs de geodeet van een testdeeltje:

$$u^\mu \xi_\mu = \text{constante}$$

waar u^μ de viersnelheid van het deeltje is. Dit is de relativistische vorm van Noether's stelling.

Het is belangrijk om hierbij een onderscheid te maken: een lineair verband tussen twee grootheden betekent niet automatisch dat er sprake is van een symmetrie. Symmetrie betekent dat de vorm van de natuurwetten onveranderd blijft onder een bepaalde transformatie (zoals tijdstranslatie of rotatie). Volgens Noether's stelling leidt zo'n symmetrie tot een behouden grootheid. Bijvoorbeeld: omdat de Schwarzschild-metriek niet expliciet afhangt van t , is tijdstranslatie een symmetrie. Daaruit volgt het behoud van energie, dat verschijnt als constante grootheid langs de baan van een deeltje. Evenzo is de onafhankelijkheid van ϕ een uitdrukking van rotatiesymmetrie, wat leidt tot behoud van impulsmoment. De lineaire relatie waarin deze behouden grootheden vaak verschijnen is dus een gevolg van de symmetrie, maar niet de symmetrie zelf.

3.2.4 Toepassing op de Schwarzschild-metriek

a) Tijdstranslatie

De Killing-vector:

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

komt overeen met tijdsinvariantie.

De bijbehorende constante is de energie per eenheid massa:

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \frac{dt}{d\tau}$$

Hier is $\frac{dt}{d\tau} \neq 0$; het deeltje beweegt gewoon in de tijd. Wat behouden blijft, is de combinatie $g_{00} \frac{cdt}{d\tau}$, dus de behouden grootheid is de coëfficiënt van de afgeleide, niet het coördinaat zelf.

b) Rotaties

Er bestaan drie Killing-vectoren die samen de volledige rotatiesymmetrie beschrijven. Een eenvoudige keuze is de azimuthale symmetrie:

$$\xi^\mu = (0,0,0,1)$$

De constante die hieruit volgt is de impulsmomentcomponent:

$$L = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}$$

Gezamenlijk leiden de drie rotatiesymmetrieën tot behoud van de totale impulsmomentvector. In de praktijk schrijft men vaak alleen de Killing-vector voor de azimuthale coördinaat ϕ uit (behoud van L_z), maar er bestaan nog twee onafhankelijke Killing-vectoren die overeenkomen met rotaties om andere assen. Samen leveren deze drie symmetrieën het behoud van de volledige impulsmomentvector (L_x, L_y, L_z) . Ook hier is de behouden grootheid de coëfficiënt die de combinatie van afgeleide en metriekcomponent representeert.

3.2.5 Fysische betekenis

Deze behouden grootheden hebben directe gevolgen:

- Energiebehoud bepaalt hoe een deeltje radiaal invalt of ontsnapt.
- Impulsmomentbehoud bepaalt of een baan gesloten is, en verklaart fenomenen zoals de periheliumprecessie van Mercurius en de afbuiging van licht.

Zo zie je hoe symmetrieën van de ruimtetijd zich vertalen in meetbare effecten in de astrofysica, waarbij de behoudswetten altijd de **coëfficiënten van de afgeleiden langs de geodeet** zijn.

3.2.6 Grenzen van Noether in de GR-context

In vlakke ruimte zijn energie en impulsmoment universeel gedefinieerd.

In kromme ruimtetijd is dat subtieler: er bestaat niet altijd een wereldwijde tijdsymmetrie.

De Schwarzschild-oplossing is stationair en asymptotisch vlak, waardoor energie- en impulsmomentbehoud wel degelijk geldig en bruikbaar zijn.

In dynamische kosmologische ruimtetijden (zoals het uitdijende heelal) is zo'n globale definitie vaak onmogelijk.

3.2.7 Conclusie

De Schwarzschild-metrik laat zien hoe krachtig Noether's idee is, ook in de algemene relativiteit. De symmetrieën van de metrik leiden via Killing-vectoren tot behoud van energie en impulsmoment. Deze behouden grootheden zijn de **coëfficiënten van de afgeleiden langs de geodeet**, niet de coördinaten zelf. Dit inzicht is essentieel voor het begrijpen van de beweging van deeltjes en licht in zwaartekrachtsvelden en vormt de brug tussen de wiskundige structuur van de theorie en de waarneembare fysische fenomenen.

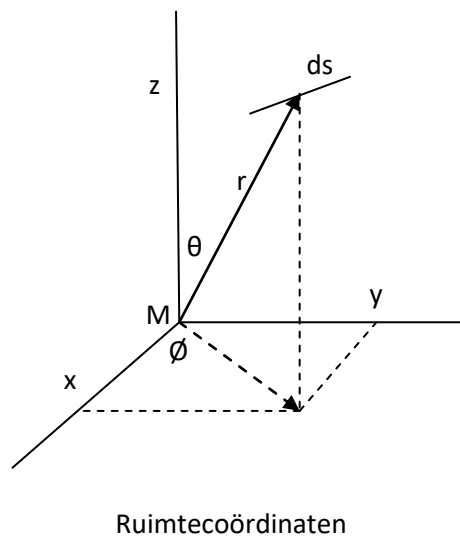
3.3 Fysische interpretatie van de Schwarzschild-Metrick

Laten we nu bekijken wat formule (1) fysisch betekent. Stel dat zich in de ruimte een object bevindt met massa M , dat we beschouwen als een puntmassa. In de klassieke Newtoniaanse mechanica veroorzaakt zo'n massa een zwaartekrachtsveld - een kracht die werkt op andere massa's in de buurt.

In de algemene relativiteitstheorie is dit idee fundamenteel anders: volgens Einstein en Schwarzschild genereert de massa M geen kracht, maar vervormt ze de structuur van de ruimte-tijd. Er is dus geen sprake meer van een kracht in de klassieke zin, maar van een geometrisch effect.

We kiezen een coördinatenstelsel waarin M zich in het middelpunt bevindt. Wanneer een testdeeltje (met verwaarloosbare massa) zich in rust bevindt ten opzichte van deze massa, ondervindt het in Newtoniaanse zin een zwaartekracht. Laten we dit deeltje los, dan zou het versnellen richting M , net zoals Newton voorspelt.

Toch voelt het deeltje zelf geen kracht. In zijn eigen (meebewegend) referentiekader ervaart het niets bijzonders - het volgt gewoon het natuurlijke pad dat de ruimte-tijd zelf voorschrijft. In Einsteins theorie is dit pad geen rechte lijn, maar een geodeet: de kortste of 'rechtste' weg in een gekromde ruimte-tijd.



3.3.1 Het gekozen coördinatenstelsel en de lokale structuur van de ruimte

We werken hier met een Euclidisch coördinatenstelsel, dat kan worden opgevat als een Cartesisch systeem (t, x, y, z) of - zoals in de Schwarzschild-oplossing - een sferisch systeem (t, r, θ, ϕ) . In het sferische geval hangt het pad dat een deeltje volgt af van alle vier de coördinaten. De Schwarzschild-metrick schrijft aan elke differentiaal

een coëfficiënt toe, die een functie is van r en θ , maar onafhankelijk is van t en ϕ . Dit weerspiegelt de sferische symmetrie rond de massa M : een rotatie om het centrum verandert niets aan de fysische situatie.

Belangrijk om te beseffen is dat deze coördinaten hypothetisch zijn: ze worden gedefinieerd alsof ze zich in een vlakke, niet-gekromde ruimte-tijd bevinden. Schwarzschild vond een expliciete formule die de ruimte-tijd-kromming rond een puntmassa beschrijft. Deze formule relateert het elementaire lijnstuk ds (de afstand in ruimte-tijd tussen twee naburige gebeurtenissen) aan het gekozen coördinatenstelsel.

Hoewel de ruimte-tijd gekromd is, kunnen we deze lokaal - in een infinitesimaal klein gebied - beschouwen als vlak. Binnen zo'n klein gebied mogen we de coördinaten cdt , dr , $d\theta$ en $d\phi$, behandelen als zijnde onderling loodrecht en rechtlijnig. De coëfficiënten in de metriek kunnen daar als constant worden beschouwd. Verplaatsen we ons naar een andere locatie, dan blijven deze eigenschappen lokaal geldig, maar met gewijzigde coëfficiënten als gevolg van veranderingen in r en θ .

Door vervolgens over ds te integreren langs een pad - dat wil zeggen, over alle infinitesimale stapjes samen - verkrijgen we het volledige traject van het deeltje in de gekromde ruimte-tijd.

3.3.2 De Schwarzschild-metriek en de rol van eigen tijd

Zoals eerder besproken, heeft de Schwarzschild-metriek in sferische coördinaten de vorm:

$$ds^2 = c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

Hierin beschrijft ds^2 het vierkante interval in de ruimte-tijd tussen twee naburige gebeurtenissen.

Voor meer compactheid introduceren we de functie:

$$\text{Waarbij: } \sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

waardoor de metriek elegant herschreven kan worden als:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1a)$$

Hierbij is $d\tau$ de **eigen tijd**: de tijd die gemeten wordt door een klok die met het object meebeweegt. Dit is de werkelijke tijdsduur die een waarnemer langs zijn eigen wereldlijn ervaart.

De coördinatentijd dt daarentegen behoort tot een hypothetisch stelsel waarin zich geen massa bevindt - een ideaal "vlak" referentiekader. Strikt genomen is dt niet direct meetbaar, behalve in de limiet $r \rightarrow \infty$, waar $\sigma \rightarrow 1$ en de ruimte-tijd vlak wordt.

Lokaal, op een vaste waarde van r , relateert de Schwarzschild-metriek de coördinatentijd en eigen tijd via een eenvoudige relatie:

$$\Delta t_{\text{coördinaat}} = \sigma dt$$

waarin σ afhankelijk is van de positie r .

3.3.3 Afgelegde afstand, snelheid en het verband met de Schwarzschild-metrick

In de Schwarzschild-ruimte-tijd wordt de infinitesimale ruimtelijke afstand $\Delta\text{afstand}$ tussen twee gebeurtenissen gegeven door:

$$\Delta\text{afstand} = \sqrt{\sigma^{-2}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2}$$

Waarbij, zoals eerder vermeld:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2r}}$$

De bijbehorende tijdsduur in coördinatentijd is:

$$\Delta\text{tijd} = \sigma dt$$

Daaruit volgt voor de (plaatselijke) snelheid v van een deeltje in het frame:

$$v^2/c^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\Delta\text{afstand}}{\Delta\text{tijd}} \right)^2 = \frac{(\sigma^{-2}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2)}{\sigma^2c^2dt^2}$$

Hierbij wordt dus rekening gehouden met de kromming van de ruimte-tijd.

Substitueren we deze uitdrukking terug in de compacte vorm van de Schwarzschild-metrick (vergelijking (1a)), dan vinden we:

$$ds^2 = c^2d\tau^2 = \sigma^2c^2dt^2 - \frac{\sigma^{-2}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2}{\sigma^2c^2dt^2} \sigma^2c^2dt^2 \quad (2)$$

wat vereenvoudigt tot:

$$c^2d\tau^2 = \sigma^2c^2dt^2 \left(1 - \frac{\sigma^{-4}}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{\sigma^{-2}r^2}{c^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{\sigma^{-2}r^2\sin^2\theta}{c^2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right) = \sigma^2c^2dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (3)$$

of nog compacter geschreven:

$$c^2d\tau^2 = \sigma^2c^2dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

waarbij:

$$v^2 = \sigma^{-4} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \sigma^{-2}r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sigma^{-2}r^2\sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (3a)$$

Deze afleiding laat zien hoe zowel de ruimtelijke als de temporele kromming samen de dynamiek van een bewegend deeltje bepalen.

3.3.4 Verband tussen eigen tijd en coördinatentijd dt

Uit de vorige afleiding (vergelijking (3)) volgt direct de relatie tussen de eigen tijd $d\tau$ en de coördinatentijd dt :

$$d\tau = \frac{\sigma}{\gamma} dt$$

Waarbij:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

Hierbij is σ een maat voor de zwaartekrachtsvertraging (door de massa M) en γ de Lorentzfactor, afkomstig uit de speciale relativiteitstheorie.

Omdat $\gamma \geq 1$ (immers, $v \leq c$ en $\sigma \leq 1$ (want $r \geq 2GM/c^2$), volgt hieruit:

$$d\tau \leq dt \quad (5)$$

Dit betekent dat de eigen tijd van het bewegende object altijd langzamer verloopt dan de coördinatentijd in het referentiekader.

Aangezien zowel σ als γ constant zijn tijdens het beschouwde interval (ze zijn slechts functie van r en v , niet van t), kunnen we deze relatie eenvoudig integreren:

$$\tau = \frac{\sigma}{\gamma} t \quad (5a)$$

waarbij τ de verstreken eigen tijd is en t de verstreken coördinatentijd.

Hier is dus:

- t is de **coördinaattijd** van een externe waarnemer (bijvoorbeeld iemand ver weg van het zwaarteveld).
- τ is de **eigentijd** van het deeltje zelf.

En:

- $\frac{dt}{d\tau}$ = snelheid waarmee de coördinaattijd verstrijkt ten opzichte van de eigen tijd van het deeltje.
- $\frac{dt}{d\tau}$ is **niet een snelheid in meters per seconde** zoals $\frac{dr}{dt}$, maar een relatieve “tijd-snelheid” tussen de coördinaattijd van de waarnemer en de eigentijd van het deeltje.
- Het speelt wél dezelfde rol in de Lagrangiaan als een kinetische term: het kwadraat $\dot{t}^2$ komt in de energie-achtige behouden grootheid.

3.3.5 Gedrag van een foton in de Schwarzschild-metrick

Voor een foton geldt dat de eigen tijd $d\tau$ nul is, omdat een foton altijd met de lichtsnelheid beweegt:

$$0 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6)$$

Hieruit volgt dat de ruimtelijke afstand die het foton aflegt wordt gegeven door:

$$(\Delta \text{afstand})^2 = \sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6b)$$

De effectieve lichtsnelheid v ten opzichte van het gekozen coördinatensysteem kunnen we nu bepalen:

$$c^2 = \left(\frac{\Delta \text{afstand}}{\Delta \text{tijd}} \right)^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}{\sigma^2 dt^2} = v^2 \quad (6c)$$

Hierbij is $\Delta \text{tijd} = \sigma dt$, zoals eerder besproken.

3.3.6 Interpretatie:

- In de teller vinden we de 'normale' ruimtelijke afstand die het foton aflegt.
- In de noemer zien we dat de tijd door een factor σ wordt beïnvloed: de klok op een gegeven locatie tikt trager vanwege de zwaartekrachtinvloed.

Hieruit blijkt dat, gemeten in de coördinatentijd dt , de lichtsnelheid effectief **lager** is dan c in de aanwezigheid van zwaartekracht.

In het lokale (meebewegende) frame beweegt het foton natuurlijk nog steeds met de constante snelheid c .

3.3.7 Alternatieve beschrijving van de fotonbeweging

We kunnen de relatie tussen afgelegde afstand en verstreken tijd ook anders herschrijven:

$$c^2 = \left(\frac{\Delta \text{afstand}}{\Delta \text{tijd}} \right)^2 = \frac{\sigma^{-2} (\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)}{dt^2} \quad (6d)$$

Hierbij merken we op:

- De ruimtelijke afstand wordt vergroot met een factor σ^{-2} (aangezien $\sigma \leq 1$).
- Tegelijkertijd blijft de coördinatentijd dt onveranderd.

3.3.8 Gevolg:

Door deze vergrote afstand in de teller, maar een onveranderde tijd in de noemer, lijkt de lichtsnelheid in het coördinatenstelsel **kleiner** dan de universele lichtsnelheid c .

3.3.9 Samenvattend beeld:

Vanuit het standpunt van het 'universele' coördinatenstelsel:

- Een foton beweegt **langs een kromme** in de gekromde ruimte-tijd, en
- De effectieve snelheid van het foton tussen twee coördinatiepunten (bijvoorbeeld van A naar B) is **kleiner dan c** .

In vergelijking:

$$\sigma^2 c^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}{dt^2} \quad (6e)$$

is te zien dat de lichtsnelheid effectief wordt gemodificeerd door de factor σ^2 .

3.3.10 Gedrag

Dit betekent fysisch dat:

- De eigen snelheid van het foton blijft c langs zijn wereldlijn.
- Maar de projectie van zijn beweging op het coördinatenstelsel ziet eruit als een lagere snelheid vanwege de kromming van de ruimte-tijd.

Met andere woorden:

$$v = \frac{\text{afstand}}{t} = \frac{\text{afstand}}{\text{padlengte}/c} = \frac{\text{afstand}}{\text{padlengte}} c$$

Omdat de padlengte groter is dan de 'rechte afstand', is $v < c$ als gemeten in coördinatentijd.

3.3.11 Relatie tussen lokale tijd op Aarde en de universele frametijd

Zoals eerder opgemerkt, is de coördinatentijd dt een hypothetische tijd, gedefinieerd in een massaloze omgeving of op oneindige afstand ($r = \infty$). Aangezien we onze metingen uitvoeren vanaf de Aarde, moeten we een verband leggen tussen (zie ook [hoofdstuk 4.6](#)):

- de **eigen tijd** $d\tau_{aarde}$ zoals gemeten door een klok op Aarde, en

- de **coördinatentijd** dt uit het universele referentiekader.

Zoals eerder afgeleid (zie ook formule (5a)), geldt:

$$d\tau_{aarde} = \frac{\sigma_{aarde}}{\gamma_{aarde}} dt$$

Of, omgekeerd:

$$dt = \frac{\gamma_{aarde}}{\sigma_{aarde}} d\tau_{aarde}$$

waarbij:

- $\sigma_{aarde} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{aarde}}}$ de gravitationele tijdsdilatatiefactor is,
- $\gamma_{aarde} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{aarde}^2}{c^2}}}$ de speciale relativistische Lorentzfactor is (wegens de rotatie van de Aarde).

3.3.12 Interpretatie:

De tijd op Aarde vertraagt dus relatief gezien vanwege twee effecten:

1. de **zwaartekracht** (gravitational time dilation, via σ),
2. de **beweging** van de Aarde (speciale relativiteit, via γ).

Voor een waarnemer die meebeweegt met de Aarde blijft zijn eigen tijd $d\tau_{aarde}$ natuurlijk normaal verlopen - elke seconde blijft een seconde.

Echter, ten opzichte van de universele frametijd dt lopen de lokale seconden **iets trager**.

3.3.13 Samenvatting:

- **Op Aarde:** eigen klok verloopt normaal (d.w.z. volgens $d\tau$).
- **Ten opzichte van het universele frame:** eigen klok loopt vertraagd door zwaartekrachts- en bewegingsinvloeden.

3.3.14 Gedrag van een foton in de Schwarzschild-metrick

Een bijzonder geval treedt op wanneer we een **foton** beschouwen. Omdat een foton zich altijd met de lichtsnelheid c voortbeweegt en **geen rustmassa** heeft, is de eigen tijd $d\tau$ langs zijn wereldlijn gelijk aan nul:

$$d\tau = 0$$

Dit volgt ook direct uit de Schwarzschild-metriek:

$$0 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6)$$

Hieruit kunnen we afleiden dat de ruimte-afgelegde afstand $\Delta\text{afstand}$ is:

$$(\Delta\text{afstand})^2 = \sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6b)$$

en de snelheid van het foton is:

$$c^2 = \left(\frac{\Delta\text{afstand}}{\Delta\text{tijd}} \right)^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}{\sigma^2 dt^2} \quad (6c)$$

3.3.15 Opmerking:

Hoewel een foton in zijn eigen (niet bestaande) rustframe een "afstand nul" zou hebben, ziet een externe waarnemer wél een afgelegde afstand over een krom pad in de ruimte-tijd.

3.3.16 Speciale gevallen:

1. Radiale beweging van het foton (alleen r -richting, $d\tau = d\theta = d\phi = 0$)

Dan vereenvoudigt de vorige vergelijking tot:

$$c^2 = \sigma^{-4} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

oftewel:

$$\sigma^4 c^2 dt^2 = dr^2 \quad \text{of} \quad \frac{\sigma^{-2} dr}{dt} = c \quad (7)$$

2. Cirkelbeweging in het equatoriale vlak ($\theta = \pi/2$)

Als het foton zich in een cirkelbaan rond de massa M bevindt (dus $d\tau = dr = d\theta = 0$), dan volgt:

$$v = c = \frac{r d\phi}{\sigma dt}$$

Hieruit blijkt dat de rotatiesnelheid $d\phi/dt$ afhankelijk is van de afstand r en de krommingsfactor σ .

3.3.17 Op grote afstand:

Als $r = \infty$, geldt:

$$\sigma \rightarrow 1$$

En dus:

$$d\tau = dt$$

De tijd gemeten langs het pad van het foton en de coördinatentijd vallen dan samen - precies zoals we verwachten in een gebied zonder zwaartekracht (vlakke ruimte-tijd).

3.3.18 Samenvattend:

- Voor een foton geldt altijd $d\tau = 0$.
- De relatie tussen ruimte en tijd is volledig bepaald door de krommingsfactor σ .
- In sterk gekromde ruimte-tijd (dicht bij massa) wijkt het gedrag van een foton significant af van wat we intuïtief verwachten in vlakke ruimte-tijd.

In het algemeen is de beweging op oneindige afstand rechtlijnig en uniform, en zo wordt de vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (8)$$

3.3.19 Transformatie naar Cartesiaanse Coördinaten

De oorspronkelijke benadering van Schwarzschild was niet in sferische, maar in **Cartesiaanse coördinaten**. Hoewel de Schwarzschild-oplossing meestal wordt gepresenteerd in bolcoördinaten (r, θ, ϕ) , kan deze ook worden uitgedrukt in termen van (x, y, z) .

De transformatie van de Schwarzschild-metrick naar Cartesiaanse coördinaten resulteert in:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2 r^2} (xdx + ydy + zdz)^2 \quad (9)$$

Waarbij:

- $\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ de gebruikelijke radiale afstand is.

3.3.20 Uitleg:

De eerste term $\sigma^2 c^2 dt^2$ beschrijft de tijdcomponent die afhankelijk is van de zwaartekracht. De tweede term $(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ komt overeen met de vlakke ruimte-tijd (Euclidische afstand). De derde term corrigeert voor het feit dat de tijdsvertraging (en dus de kromming) ook ruimte-componenten beïnvloedt, afhankelijk van de richting waarin we bewegen ten opzichte van de massa M .

3.3.21 Opmerking over differentiëren naar t of τ

Bij gebruik van de Schwarzschild-metrik moeten we alert zijn op de variabele ten opzichte waarvan we differentiëren:

- **Tijd t** is de *coördinatentijd*, zoals gemeten door een waarnemer op oneindige afstand (of in een gebied zonder massa).
- **Tijd τ** is de *eigentijd*, zoals gemeten langs de wereldlijn van het bewegende object.

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1a)$$

In formulevorm (voor het vlak $\theta = \pi/2$) en delen door $c^2 d\tau^2$:

$$1 = \sigma^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{cd\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{cd\tau} \right)^2 \quad (10)$$

of, door om te schrijven met partiële afgeleiden naar t :

$$1 = \sigma^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{cdt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{cdt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Dan:

$$1 = \sigma^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{dr}{cdt} \right)^2 - \frac{r^2}{\sigma^2} \left(\frac{d\phi}{cdt} \right)^2 \right) \quad (11)$$

Hieruit volgt hoe beweging (snelheden) en tijdsvertragingen in gekromde ruimte-tijd samenhangen.

3.3.22 Snelheid ten opzichte van lokale en universele tijd

De snelheid ten opzichte van de **eigentijd** τ is:

$$v_{co}^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}{d\tau^2}$$

en de Schwarzschild-metrik kan in termen van v_{co} worden geschreven:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}{d\tau^2} d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - v_{co}^2 d\tau^2$$

Of:

$$c^2 d\tau^2 + v_{co}^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2$$

Benadering voor kleine snelheden ($v_{co} \ll c$) via een Taylor-reeks:

$$d\tau^2 = \frac{\sigma^2}{1 + \left(\frac{v_{co}}{c} \right)^2} dt^2 \approx \sigma^2 \left(1 - \left(\frac{v_{co}}{c} \right)^2 \right) dt^2$$

$$d\tau \approx \sigma \sqrt{1 - \left(\frac{v_{co}}{c}\right)^2} dt \Rightarrow d\tau = \frac{\sigma}{\gamma_{co}} dt$$

Met $\gamma_{co} = 1/\sqrt{1 - v_{co}^2/c^2}$.

3.3.23 Samenvatting

- Schwarzschild werkte oorspronkelijk in Cartesiaanse coördinaten.
- De Schwarzschild-metrickan worden herleid naar zowel bol- als Cartesiaanse vorm.
- Bij interpretaties van beweging (bijv. banen rond een massa) is het essentieel om goed onderscheid te maken tussen de coördinatentijd t en de eigentijd τ .
- Voor kleine snelheden is de invloed van de ruimte-tijd kromming op de tijdsbeleving klein, maar meetbaar.

Over het algemeen speelt een traject zich af in één vlak. In dat geval kan het sferische systeem altijd zo worden gekozen dat het evenaarsvlak samenvalt met het trajectvlak; in dat geval is $\theta = \pi/2$.

Als het traject een cirkel is, waarbij dus $\theta = \pi/2$ en waarbij de r constant is, dan is $dr = 0$ en wordt de vergelijking:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2$$

Aanvullende overpeinzingen:

3.3.24 Aanvulling 1: Interpretatie van ds als Lijnsegment in de Ruimte-tijd

Misschien is het nuttig om ds te beschouwen als een oneindig klein lijnsegment in de ruimte-tijd, waarvan de lengte in meters kan worden gemeten door de reistijd van een foton over dat segment te vermenigvuldigen met de lichtsnelheid c .

Het lijnsegment ds bevindt zich in de oorsprong van zijn eigen meebewegend referentiekader. Binnen dat kader is tijd de enige fysische grootte die direct kan worden gemeten. De afstand wordt gemeten via de reistijd van het foton.

Dus:

$$ds = cd\tau$$

waarbij $d\tau$ de eigen tijd is die op een meebewegende klok wordt geregistreerd.

Nu introduceren we een **tweede referentiekader**, bijvoorbeeld het Schwarzschild-kader, waarin zich een centrale massa M bevindt. In dit kader kunnen we de afstand tussen het lijnsegment en de oorsprong bepalen door gebruik te maken van externe meetinstrumenten (zoals lasers, staven, enzovoort).

Belangrijk:

De tijdsbepaling in dit externe kader is indirect: ze is afhankelijk van de relatie die wordt gegeven door de Schwarzschild-metrick, en kan niet direct worden gemeten met een klok ter plaatse.

Volgens de Schwarzschild-metrick geldt:

$$c^2 d\tau^2 = (c\Delta T)^2 - (\Delta X)^2$$

$$(c\Delta T)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 + (\Delta X)^2$$

Waarbij ΔX de ruimtelijke component is, bijvoorbeeld:

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Hieruit volgt:

$$c^2 dt^2 = \frac{(c\Delta T)^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$

De relatie tussen de theoretische tijd dt en de eigen tijd $d\tau$ kan alleen via deze formule worden bepaald.

3.3.25 Aanvulling 2: Wereldlijn van een Deeltje in een Meebewegend Referentiekader

Beschouwen we een deeltje in een meebewegend (lokaal) referentiekader, dan is het deeltje in rust ten opzichte van dat kader. Het enige pad dat het deeltje volgt in de ruimte-tijd is langs zijn eigen τ -as: de eigen tijd.

We kunnen echter de beweging van het deeltje beschrijven ten opzichte van een **extern** (mogelijk bewegend) referentiekader. In dat geval drukken we de positie van het deeltje uit in coördinaten (t, x, y, z) van dat andere kader.

De wereldlijn van het deeltje - het pad dat het deeltje volgt door de ruimte-tijd - is dan volledig een functie van τ :

$$(t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$

De vier coördinaten zijn dus functies van de eigen tijd τ .

3.3.26 Voorbeeld: Tijdsverschil tussen de Polen en de Evenaar

We berekenen het tijdsverschil aan het aardoppervlak tussen de tijd bij de polen en aan de evenaar, veroorzaakt door relativistische effecten.

Uitgaande van de Schwarzschild-metriek:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

3.3.27 Bij de Polen

Aan de polen geldt:

- $dr = 0$ (geen radiale beweging),
- $\theta = 0$,
- $d\theta = 0$,
- $\sin \theta = 0$.

Dan wordt de Schwarzschild-metriek:

$$c^2 d\tau_{polen}^2 = \sigma^2 c^2 dt^2$$

waaruit volgt:

$$d\tau_{polen} = \sigma dt$$

3.3.28 Bij de Evenaar

Aan de evenaar geldt:

- $dr = 0$,
- $\theta = \pi/2$,
- $d\theta = 0$,
- $\sin \theta = 1$

Dan wordt de metriek:

$$c^2 d\tau_{evenaar}^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2$$

waarbij $d\phi$ de draaiing om de rotatie-as van de Aarde beschrijft.

We herschrijven dit:

$$c^2 d\tau_{evenaar}^2 = c^2 d\tau_{polen}^2 - r^2 d\phi^2$$

Of:

$$c^2 d\tau_{evenaar}^2 = c^2 d\tau_{polen}^2 \left\{ 1 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau_{polen}} \right)^2 \right\}$$

De draaisnelheid $v_{evenaar}$ aan de evenaar is:

$$v_{evenaar} = r \frac{d\phi}{d\tau_{polen}}$$

Dus:

$$c^2 d\tau_{evenaar}^2 = c^2 d\tau_{poles}^2 \left\{ 1 - \frac{v_{evenaar}^2}{c^2} \right\}$$

$$d\tau_{evenaar} = d\tau_{polen} \sqrt{1 - \frac{v_{evenaar}^2}{c^2}}$$

Voor kleine snelheden ($v \ll c$) kunnen we dit benaderen via een Taylor-reeks:

$$d\tau_{evenaar} \approx d\tau_{polen} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_{evenaar}^2}{c^2} \right)$$

3.3.29 Praktische Berekening

De rotatiesnelheid aan de evenaar is ongeveer:

$$\approx 1672 \text{ km/h of } 465 \text{ m/s}$$

Dit resulteert in:

$$\frac{v_{evenaar}^2}{c^2} \approx 2.4 * 10^{-12}$$

Daarmee:

$$d\tau_{evenaar} = d\tau_{polen} (1 - 1.2 * 10^{-12})$$

3.3.30 Interpretatie

Een klok aan de evenaar tikt iets trager dan een klok aan de polen. Over een periode van 100 jaar zou het verschil oplopen tot ongeveer:

$$100 \text{ jaar} * 1.2 * 10^{-12} \approx 3,75 \text{ milliseconden}$$

3.3.31 Conclusie

Een persoon die 100 jaar op de Noordpool heeft geleefd, zou (theoretisch) 3,75 milliseconden ouder zijn dan iemand die aan de evenaar verbleef, als alle andere omstandigheden gelijk zijn gebleven.

3.3.32 Aanvulling 3: De Schwarzschild-coëfficiënt en de Ontsnappingsnelheid

Laten we speciale aandacht besteden aan de factor:

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

Deze uitdrukking doet denken aan de bekende formule voor de ontsnappingsnelheid, die bepaalt welke minimale snelheid een massa moet hebben om een andere massa (bijvoorbeeld de aarde) te kunnen verlaten.

We gaan deze relatie hieronder afleiden.

3.3.33 Berekening van de Minimale Ontsnappingsnelheid

Beschouwen we een massa m die wordt weggeschoten van een object met massa M (bijvoorbeeld de aarde), dan is:

- De kinetische energie van m :

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

- De gravitatiekracht die m ondervindt:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

waarbij r de afstand tot het centrum van massa M is.

- Het werk dat verricht moet worden om de massa m van r naar oneindig te brengen (waarbij de zwaartekrachtsinvloed nul is), is:

$$W = \int_r^\infty F ds = \int_r^\infty G \frac{Mm}{s^2} ds = -G \frac{Mm}{s} \Big|_r^\infty = GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = G \frac{Mm}{r}$$

Om te kunnen ontsnappen, moet de kinetische energie gelijk zijn aan dit werk:

$$\frac{1}{2}mv^2 = G \frac{Mm}{r}$$

Waaruit volgt:

$$v^2 = \frac{2GM}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Of omgekeerd:

$$r = \frac{2GM}{v^2}$$

3.3.34 De Maximale Snelheid: Licht

De maximale snelheid die een object kan bereiken is de lichtsnelheid c . Indien

$$v = c$$

dan wordt de bijbehorende afstand:

$$r = \frac{2GM}{c^2}$$

Dit is de zogeheten **Schwarzschild-radius**:

$$r = R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Wanneer een object zich binnen deze straal bevindt, is het onmogelijk om eraan te ontsnappen - zelfs licht kan niet ontsnappen. In dat geval spreken we van een **zwart gat**.

3.3.35 Verband met de Schwarzschild-metrieek

In de Schwarzschild-metrieek verschijnt deze straal in de factor:

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

Normaal gesproken positief ligt deze factor tussen 1 en 0:

Normaal gesproken ligt deze factor tussen 1 en 0:

- **Voor grote afstanden** ($r \rightarrow \infty$) nadert de factor 1.
- **Nabij de Schwarzschild-radius** ($r = R_s$) wordt de factor 0.

Wanneer:

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 0$$

bevindt het object zich precies op de Schwarzschild-radius, oftewel op de **gebeurtenishorizon** van een zwart gat.

3.3.36 Opmerking

Als r kleiner wordt dan R_s , zou de factor negatief worden. Wat dit fysiek betekent, vereist diepere analyse binnen de relativistische theorie van zwarte gaten, en gaat verder dan wat we hier behandelen.

3.3.37 Kernpunten en Intuïtie

- In de algemene relativiteit **vervangt geometrie de kracht**: massa kromt ruimte-tijd in plaats van een krachtveld te genereren.
- De Schwarzschild-metrieek beschrijft deze kromming rondom een **sferisch symmetrische massa** en geldt buiten de massa, waar $T_{\mu\nu} = 0$.
- Een testdeeltje dat beweegt in dit veld **voelt geen kracht**, maar **volgt een geodeet** - het 'rechtste' pad in gekromde ruimte-tijd.
- De metrieek in bolcoördinaten:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad \text{met} \quad \sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

- De coördinatentijd dt geldt in het asymptotisch vlakke (hypothetische) kader op $r \rightarrow \infty$; de eigen tijd $d\tau$ wordt gemeten door een klok die meebeweegt met het object.

Intuïtief

Einstein stelt: een massa beïnvloedt de **meetstructuur** van ruimte en tijd zelf. Een vrij vallend object beweegt dan niet “door een kracht”, maar **volgt het pad dat de geometrie van de ruimte-tijd oplegt** - vergelijkbaar met een kiezelsteen die rolt in een krom oppervlak.

De Schwarzschild-metrieek zegt:

- De **tijd verloopt langzamer** dichterbij een massa (via $\sigma < 1$).
- De **ruimte is uitgerekt** in de radiale richting.
- Voor een bewegend object relateert de metrieek $d\tau$ aan dt én zijn snelheid v :

$$d\tau = \frac{\sigma}{\gamma} dt \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Tabel: Begrippen en fysische grootheden uit de Schwarzschild-metrieek

Grootheid

Fysische interpretatie

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

Gravitationele tijdsdilatatiefactor

$d\tau$

Eigen tijd: gemeten door een lokale klok

dt

Coördinatentijd: gemeten in asymptotisch vlak referentiekader

v

Lokale snelheid, afgeleid uit ruimtelijke coördinaten en dt

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

Vierdimensionaal interval (invariant): tijds- en ruimte-element

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Schwarzschild-radius: waar $\sigma = 0$, gebeurtenishorizon

3.3.38 Specifieke gevallen en effecten

- **Fotonen:**
 - Volgen een traject met $d\tau = 0$: ze ervaren geen eigen tijd.
 - De **effectieve lichtsnelheid in coördinatentijd** is kleiner dan c (maar lokaal blijft $v = c$).
- **Object in rust bij massa:**
 - Tijdsdilatatie via $d\tau = \frac{\sigma}{\gamma} dt$: hoe kleiner r , hoe langzamer de klok.
- **Object in beweging (bijv. cirkelbaan):**
 - Zowel gravitationele als kinematische tijdsdilatatie spelen een rol.
- **Vergelijking voor snelheid in Schwarzschild-coördinaten:**

$$v^2 = \sigma^{-4} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \sigma^{-2} r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sigma^{-2} r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (3a)$$

3.3.39 Toepassing: Tijd op Aarde vs. Tijd op oneindige afstand

- Tijd op Aarde vertraagt t.o.v. de universele coördinatentijd, zowel door:
 - zwaartekracht (via σ),
 - rotatie van de Aarde (via γ).
- Resultaat: over 100 jaar is een klok aan de polen $\approx 3,75$ ms voor op een klok aan de evenaar (bij benadering).

3.3.40 Zwarte gaten en ontsnappingsnelheid

- Uit Newtons mechanica volgt:

$$v_{ontsnapping} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \Rightarrow R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

- Bij $r = R_s$ wordt $\sigma \rightarrow$ **gebeurtenishorizon**: niets kan ontsnappen.
- De Schwarzschild-metrick bevat deze grens expliciet.

3.3.41 Slotinzicht

De Schwarzschild-metrick levert **direct meetbare voorspellingen**:

- Tijdsdilatie (o.a. GPS-correcties),
- Lichtafbuiging (zoals gemeten tijdens zonsverduisteringen),
- Periheliumprecessie van Mercurius,
- Voorwaarden voor het ontstaan van zwarte gaten.

De Schwarzschild-metrick is dus geen abstract wiskundig object, maar een fysische machine die ons vertelt **hoe klokken lopen, hoe licht buigt, en hoe massa's bewegen - puur op basis van de geometrie van ruimte en tijd.**

3.4 Experimenten: Bevestiging van de Algemene Relativiteit

De algemene relativiteitstheorie is niet alleen een elegante wiskundige theorie, maar wordt ook krachtig ondersteund door experimenten en waarnemingen. Veel van deze experimenten maken gebruik van de **Schwarzschild-oplossing** als basis voor hun theoretische voorspellingen.

De volgende experimenten worden in dit werk besproken:

1. Hafele-Keating-experiment (1971) (zie hoofdstuk [4.1](#))

- **Beschrijving:** Atoomklokken werden in vliegtuigen rond de aarde gevlogen, zowel oostwaarts als westwaarts, en vergeleken met klokken op de grond.
- **Resultaat:** De gemeten tijdsverschillen kwamen exact overeen met de voorspellingen van de algemene relativiteit (zwaartekrachts-tijdsdilatie én bewegings-tijdsdilatie).
- **Relatie tot Schwarzschild-metrick:** De tijdsdilatie door zwaartekracht wordt direct uit de Schwarzschild-oplossing afgeleid.

2. Beweging van deeltjes in een zwaartekrachtsveld (zie hoofdstuk [4.2](#))

- **Beschrijving:** De banen van satellieten, planeten en andere objecten worden nauwkeurig gevolgd.

- **Resultaat:** De waargenomen banen komen overeen met de voorspellingen uit de Schwarzschild-geometrie, inclusief kleine afwijkingen van de klassieke (Newtonse) voorspellingen.

3. Afbuiging van licht nabij massa's (zie hoofdstuk [4.3](#))

- **Beschrijving:** Tijdens zonsverduisteringen werd gemeten hoe het licht van sterren wordt afgebogen door de zwaartekracht van de zon.
- **Resultaat:** De gemeten afbuiging (door Eddington in 1919 en vele latere experimenten) komt exact overeen met de waarde voorspeld door de Schwarzschild-metrick.
- **Fysisch belang:** Bewijst dat licht zelf wordt beïnvloed door de kromming van ruimte-tijd.

4. Precessie van de periheliën (Mercurius) (zie hoofdstuk [4.4](#))

- **Beschrijving:** De baan van Mercurius draait langzaam rond de zon; deze precessie kan niet volledig door Newtonse zwaartekracht verklaard worden.
- **Resultaat:** De resterende precessie wordt exact verklaard door de Schwarzschild-oplossing.
- **Historisch belang:** Dit was een van de eerste grote successen van de algemene relativiteit.

5. Shapiro-tijdvertraging (zie hoofdstuk [4.5](#))

- **Beschrijving:** Radiogolven die langs de zon reizen, doen er langer over dan verwacht in vlakke ruimte-tijd.
- **Resultaat:** De extra tijdsvertraging komt overeen met de voorspelling van de Schwarzschild-metrick.
- **Toepassing:** Wordt gebruikt in radar- en communicatiesatellieten.

6. Baan van een kogel in een sterk zwaartekrachtsveld (zie hoofdstuk [4.8](#))

- **Beschrijving:** Simulaties en metingen van objecten die zich met hoge snelheid in de buurt van massieve objecten bewegen.
- **Resultaat:** De banen wijken af van Newtonse voorspellingen, maar komen overeen met de Schwarzschild-voorspellingen.

Conclusie

In al deze experimenten zijn de resultaten in uitstekende overeenstemming met de voorspellingen van de algemene relativiteitstheorie, zoals afgeleid uit de Schwarzschild-metrick. Dit vormt een krachtige bevestiging van de juistheid van Einsteins theorie.

Kernpunt

De algemene relativiteitstheorie is niet alleen een wiskundig elegante theorie, maar wordt ook experimenteel bevestigd tot op hoge precisie. De Schwarzschild-metrick vormt daarbij de sleutel tot het begrijpen van de meeste klassieke tests van de zwaartekracht.

Deel IV – Experimenten en Verificaties

4 Experimenten ter bevestiging van Einsteins Theorie

In dit hoofdstuk bespreken we een reeks experimenten die de algemene relativiteitstheorie van Einstein empirisch ondersteunen. Een centraal hulpmiddel bij de analyse van deze experimenten is de Schwarzschild-oplossing van de Einstein-veldvergelijkingen.

De volgende experimenten komen aan bod:

- Het Hafele–Keating-experiment (zie hoofdstuk [4.1](#))
- De beweging van deeltjes in een zwaartekrachtsveld (zie hoofdstuk [4.2](#))
- De afbuiging van licht in de nabijheid van massa's (zie hoofdstuk [4.3](#))
- De precessie van de periheliën van planeten, met name Mercurius (zie hoofdstuk [4.4](#))
- De Shapiro-tijdvertraging (zie hoofdstuk [4.5](#))
- De berekening van de baan van een kogel in een sterk zwaartekrachtsveld (zie hoofdstuk [4.8](#))

Deze experimenten vormen samen een krachtig bewijs voor de geldigheid van de algemene relativiteitstheorie. In elk geval biedt de Schwarzschild-metrick een wiskundig kader waarmee de waargenomen fenomenen nauwkeurig verklaard kunnen worden.

4.1 Experiment 1 - Het Hafele & Keating-Experiment met de Schwarzschild-Vergelijking

Afleiding gebaseerd op: *A Hafele & Keating-like thought experiment*, door Paul B. Andersen, 16 oktober 2008 (Andersen, 2008).

Het beroemde experiment van Hafele en Keating testte kwantitatieve voorspellingen van de relativiteitstheorie, met name de tijdsdilatatie als gevolg van zowel beweging (speciale relativiteitstheorie) als zwaartekracht (algemene relativiteitstheorie).

In dit experiment werden twee vliegtuigen uitgerust met cesiumklokken en liet men ze gelijktijdig in tegengestelde richtingen rond de aarde vliegen. Daarnaast bleef een derde cesiumklok op een vaste locatie op aarde (in Washington). De resultaten toonden aan dat de klokken aan boord verschillende tijdsdilatatie-effecten ondergingen, afhankelijk van hun bewegingsrichting en positie ten opzichte van de aarde.

De klok in het oostwaarts vliegende vliegtuig bewoog met de rotatie van de aarde mee. Daardoor had deze klok een grotere snelheid ten opzichte van het niet-roterende middelpunt van de aarde dan de grondklok. Dit leidde tot een sterkere tijdsdilatatie: de klok liep achter. Daarentegen bewoog het westwaarts vliegende vliegtuig tegen de rotatie van de aarde in, wat resulteerde in een lagere snelheid ten opzichte van het aardcentrum, en dus in een zwakkere tijdsdilatatie: deze klok liep juist voor. Dit verschil in tijdsverloop toont aan dat de voortgang van de tijd afhankelijk is van de beweging van de waarnemer - een effect dat al in 1905 werd voorspeld door Einstein in zijn oorspronkelijke artikel over de speciale relativiteitstheorie.



Alle drie de klokken bewegen naar het oosten. Zelfs al beweegt het vliegtuig dat naar het westen vliegt ten opzichte van de lucht naar het westen, de lucht beweegt naar het oosten door de rotatie van de aarde.

Bron: (Crowell, 11 maart 2018)

Doel en Opzet

- **Doel:** Directe experimentele toets van Einsteins voorspellingen voor tijdsdilatatie door zowel beweging (speciale relativiteit) als zwaartekracht (algemene relativiteit).
- **Opzet:** Cesiumklokken werden in vliegtuigen oost- en westwaarts rond de aarde gevlogen, terwijl een referentieklok op aarde bleef. De tijdsverschillen tussen deze klokken werden gemeten en vergeleken met de theoretische voorspellingen.

Theoretisch Kader: Schwarzschild-metrick

De **Schwarzschild-metrick** beschrijft de ruimte-tijd buiten een sferisch symmetrisch massief lichaam zoals de aarde:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

Hierbij geldt:

- t : de coördinatentijd, gemeten door een hypothetische klok buiten elk zwaartekrachtsveld;
- τ : de eigen tijd, gemeten door een meebewegende klok op positie r ;

- r : afstand tot het middelpunt van de aarde;
- θ : breedtehoek ten opzichte van de Noordpool;
- $\varnothing$: lengtehoek ten opzichte van een vaste meridiaan;
- G : de gravitatieconstante;
- M : de massa van de aarde;
- c : de lichtsnelheid.

De Schwarzschild-metrick gebruikt een universeel (sferisch) coördinatenstelsel met als oorsprong het zwaartepunt van de aarde. De aarde roteert binnen dit coördinatenstelsel. Veranderingen in de hoeken θ en $\varnothing$ beschrijven beweging over het aardoppervlak. Kleine veranderingen in tijd en ruimte worden respectievelijk aangeduid met dt , dr , $d\theta$ en $d\varnothing$.

Merk op dat dt de tijdsverandering is voor een hypothetische waarnemer ver weg van zwaartekrachtinvloeden; het is geen direct gemeten tijd maar een theoretische coördinatentijd. De daadwerkelijke tijd die door een klok op een bepaalde locatie wordt gemeten, is $d\tau$, de eigen tijd.

We zullen de Schwarzschild-metrick gebruiken om een benaderde formule af te leiden die de tijdsdilatatie van de klokken beschrijft, op basis van hun positie en beweging. Daarna geven we ook de volledige (exacte) oplossing. Hoewel die laatste complexer is, is ze met behulp van computerprogramma's zoals Excel goed hanteerbaar en levert ze een nauwkeurig resultaat.

4.1.1 Benaderde Formule voor Tijdsdilatatie

We benaderen de situatie waarin de klokken zich op cirkelvormige banen rond de aarde bevinden: óf op zeeniveau, óf op een bepaalde hoogte boven het aardoppervlak. Omdat de banen cirkelvormig zijn, geldt dat $dr = 0$. Bovendien nemen we aan dat de beweging plaatsvindt in het vlak van de evenaar, waardoor $\theta = \pi/2$, constant is en dus $d\theta = 0$.

Daarmee vereenvoudigt vergelijking (1) zich tot:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2 d\varnothing^2 \quad (2)$$

$$d\tau^2 = \left(\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\varnothing}{dt}\right)^2 \right) dt^2 \quad (3)$$

Als we gebruik maken van $v = r \frac{d\varnothing}{dt}$, krijgen we:

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2}\right)} dt \quad (4)$$

Omdat de termen $\frac{2GM}{c^2 r}$ en $\frac{v^2}{c^2}$ zeer klein zijn ten opzichte van 1, kunnen we een eerste-orde benadering toepassen met een Taylor-reeks:

$$d\tau \approx \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt \quad (5)$$

Aangezien r en v constant zijn, kunnen we eenvoudig integreren:

$$\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{2c^2}\right) t + \tau(0) \quad (6)$$

Het is interessant om nu de eigen tijd τ van verschillende klokken met elkaar te vergelijken. We nemen de klok op het aardoppervlak als referentie. Deze klok heeft snelheid v_1 als gevolg van de aardrotatie, en bevindt zich op afstand r_1 van het middelpunt van de aarde. Voor deze klok geldt:

$$d\tau_1 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right) dt \quad (7)$$

Voor een klok in een vliegtuig (met snelheid v_2 en afstand r_2):

$$d\tau_2 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) dt \quad (8)$$

We willen nu het tijdsverloop van klok 2 uitdrukken ten opzichte van klok 1. Hiervoor gebruiken we een benadering voor de verhouding van de tijdseenheden:

$$d\tau_2 = \frac{\left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right)}{\left(1 - \frac{GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right)} d\tau_1$$

Door gebruik te maken van $(1 - \varepsilon)^{-1} \approx 1 + \varepsilon$, volgt:

$$\begin{aligned} d\tau_2 &\approx \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2}\right) d\tau_1 \\ d\tau_2 &\approx \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) d\tau_1 \end{aligned}$$

Daar de termen $\frac{GM}{c^2 r_1}$, $\frac{v_1^2}{2c^2}$, $\frac{GM}{c^2 r_2}$ en $\frac{v_2^2}{2c^2}$ zeer klein zijn kunnen hun producten verwaarloosd worden, waaruit volgt:

$$\begin{aligned} d\tau_2 &\approx \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) d\tau_1 \\ d\tau_2 &\approx \left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2}\right) d\tau_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Als we aannemen dat beide klokken starten bij $\tau_1 = \tau_2 = 0$ dan is de integratie direct:

$$\tau_2 \approx \left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (10)$$

Vergelijking tussen Klokken

Voor een klok op het aardoppervlak (r_1, v_1) en een klok in een vliegtuig (r_2, v_2):

$$\tau_2 - \tau_1 \approx \left(\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (11)$$

Stel dat klok 1 zich op het aardoppervlak bevindt met straal R , en klok 2 zich in een vliegtuig op hoogte h , dan is $r_2 = R + h$. Omdat $h \ll R$, kunnen we benaderen:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \approx \frac{h}{R^2} \Rightarrow \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \approx \frac{gh}{c^2}$$

Dus:

$$\tau_2 - \tau_1 \approx \left(\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_1 \approx \left(\frac{GM}{c^2} \left(\frac{h}{R^2} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (12)$$

Als we aannemen dat $\frac{h}{R} \ll 1$ en de zwaartekrachtversnelling $g = \frac{GM}{R^2}$ is, dan:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (13)$$

Aangezien $v_1 = v_{earth}$ (rotatiesnelheid van de aarde) en $v_2 = v_{plane} + v_{earth}$ (snelheid van het vliegtuig ten opzichte van het coördinatenstelsel), krijgen we:

$$\begin{aligned} v_1^2 - v_2^2 &= v_{earth}^2 - (v_{plane} + v_{earth})^2 = v_{earth}^2 - v_{plane}^2 - 2v_{earth}v_{plane} - v_{earth}^2 \\ v_1^2 - v_2^2 &= -v_{plane}^2 - 2v_{earth}v_{plane} = -v_{plane}(v_{plane} + 2v_{earth}) \end{aligned}$$

Invullen in (13) geeft:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{v_{plane}(v_{plane} + 2v_{earth})}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (14)$$

Deze vergelijking is dus volledig afgeleid van de Schwarzschild-vergelijking met enkele benaderingen.

Deze formule stemt overeen met de benadering zoals gebruikt in het originele Hafele-Keating-experiment en is dus consistent afgeleid vanuit de Schwarzschild-vergelijking, inclusief de noodzakelijke benaderingen.

Opmerking 1:

Als de snelheid v_2 van het vliegtuig een grondsnelheid betreft, dan kan, als benadering op hoogte h , worden gesteld:

$$v_2 = \frac{R+h}{R} (v_{plane} + v_{earth})$$

In dat geval zou formule (13) dienovereenkomstig aangepast worden.

Opmerking 2:

Een nauwkeuriger benadering wordt besproken in het volgende hoofdstuk, waar de snelheden v_1 en v_2 specifiek worden afgeleid op basis van het gebruikte coördinatenstelsel.

4.1.2 Uitwerking van V_1 en V_2 in Vergelijking (13)

De snelheid v_1 in [vergelijking 3 1 1 13](#) is de snelheid van een stilstaand punt op de evenaar van het aardoppervlak. Deze wordt uitgedrukt als:

$$v_1 = r_1 \frac{d\phi}{dt}$$

waarbij dt coördinaattijd is in het 'universele' referentiekader. Omdat metingen op het aardoppervlak echter plaatsvinden met betrekking tot de lokale eigen tijd τ , is een conversie nodig. Door de kettingregel geldt:

$$v_{1t} = r_1 \frac{d\phi}{dt} = r_1 \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = v_{1\tau} \frac{d\tau}{dt} \quad (14a)$$

We gebruiken de Schwarzschild-metrick (in het equatoriale vlak en met $dr=0$) om $d\tau/dt$ te vinden:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) c^2 dt^2 - r_1^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 d\tau^2$$

Herordening levert:

$$\left(1 + \frac{r_1^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right) d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) dt^2$$

We definiëren nu:

$$\sigma^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{v_{1\tau}^2}{c^2}\right) d\tau^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) dt^2 = \sigma_1^2 dt^2 \\ \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= \frac{\sigma_1^2}{\left(1 + \frac{v_{1\tau}^2}{c^2}\right)} \end{aligned} \quad (14b)$$

Substitutie in(14a) geeft:

$$v_{1t}^2 = v_{1\tau}^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = v_{1\tau}^2 \frac{\sigma_1^2}{\left(1 + \frac{v_{1\tau}^2}{c^2} \right)}$$

De uitdrukking laat zien dat $d\tau/dt$ - en dus de conversie tussen coördinaattijd en eigen tijd - afhankelijk is van $v_{1\tau}$, de rotatiesnelheid van de aarde gemeten in eigen tijd op het aardoppervlak.

Beschouw nu een vliegtuig dat oostwaarts vliegt. De totale snelheid op aardniveau is dan:

$$v_{1\tau_plane} = v_{plane_ \tau} + v_{1\tau_earth} = r_1 \frac{d\phi}{d\tau}$$

waarbij:

- $v_{plane_ \tau}$ de snelheid van het vliegtuig is t.o.v. het aardoppervlak, gemeten in eigen tijd
- $v_{1\tau_earth}$ de rotatiesnelheid van een stilstaand punt op aarde is, ook gemeten in eigen tijd

De bijbehorende hoeksnelheid in het universele frame is dan:

$$r_1 \frac{d\phi}{dt} = r_1 \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = (v_{plane_ \tau} + v_{1\tau_earth}) \frac{d\tau}{dt} = (v_{plane_ \tau} + v_{1\tau_earth}) \frac{\sigma_1}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = (v_{plane_ \tau} + v_{1\tau_earth}) \frac{\sigma_1}{r_1 \sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}}$$

Hier hebben we de rotatiesnelheid (hoeksnelheid) berekend in het universele frame. Dit is geldig voor elk niveau, ofwel elke afstand vanaf het middelpunt. Maar de snelheid zelf wordt bepaald door r maal deze rotatiesnelheid.

Snelheid op niveau van het vliegtuig

$v_{plane_ \tau}$ is de gemeten snelheid van het vliegtuig op grondniveau en ten opzichte van de eigen tijd, wat de enige beschikbare tijd is op dat niveau. $v_{earth_ \tau}$ is de (roterende) snelheid van een stilstaand punt op aarde ten opzichte van het universele frame, maar gemeten met de eigen tijd op aardniveau.

De snelheid van het vliegtuig in het universele frame op hoogte r_2 is:

$$v_{2t} = r_2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_1 (v_{plane_ \tau} + v_{1\tau_earth})}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}}$$

We splitsen deze snelheid in een 'aardrotatie'- en een 'vliegtuig'-component:

$$v_{2t} = v_{2t_earth} + v_{2t_plane}$$

Met:

$$v_{2t_earth} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_1 v_{1\tau_earth}}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}}$$

En:

$$v_{2t_plane} = v_{2t} - v_{2t_earth} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_1 v_{plane_t}}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}}$$

Samenvatting van het resultaat:

De conversie van snelheid op aardniveau naar het universele frame:

$$v_{1t_earth} = v_{1\tau_earth} \frac{\sigma_{earth}}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}} \quad (15)$$

De snelheid v_2 van het vliegtuig in het universele frame is:

$$v_{2t} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_{earth} (v_{plane_t} + v_{earth_t})}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}} \quad (16)$$

Substitutie in vergelijking (3.1.1. 13):

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (13)$$

wordt dan:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{\sigma_{earth}^2}{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{2c^2} \left[\left(\frac{R+h}{R} \right)^2 (v_{plane_t} + v_{earth_t})^2 - v_{1\tau_earth}^2 \right] \right) \tau_1 \quad (17)$$

Deze vergelijking beschrijft de tijdsdilatatie tussen een klok op het aardoppervlak en een klok aan boord van een vliegtuig, rekening houdend met zowel gravitationele als snelheidsafhankelijke effecten, alle gebaseerd op lokaal meetbare grootheden.

4.1.3 De Exacte Afleiding

In plaats van een benadering, maken we nu een exacte afleiding, volledig gebaseerd op de Schwarzschild-metrick.

We beginnen bij vergelijking (4)

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2}\right)} dt \quad (4)$$

Aangezien r en v constant zijn, is de integratie eenvoudig:

$$\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2}\right)} t + \tau(0) \quad (6a)$$

Het doel is de eigen tijd van verschillende klokken met elkaar te vergelijken. Als referentie nemen we de klok op het aardoppervlak. Andere klokken bevinden zich in vliegtuigen, op grotere hoogte en met verschillende snelheden. Zelfs de klok op aarde heeft een niet-nul snelheid door de aardrotatie.

Voor de klok op het aardoppervlak (straal r_1 , snelheid v_1) geldt:

$$d\tau_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)} dt \quad (7a)$$

Voor de klok in het vliegtuig (straal r_2 , snelheid v_2):

$$d\tau_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)} dt \quad (8a)$$

Om de verhouding tussen de twee eigen tijden te vinden, delen we deze uitdrukkingen:

$$d\tau_2 = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} d\tau_1 \quad (9a)$$

Bij gelijke begintijd ($\tau_2(0) = \tau_1(0) = 0$), is de oplossing:

$$\tau_2 = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} \tau_1 \quad (10a)$$

Tijdverschil tussen twee klokken

Het tijdsverschil tussen de twee klokken is:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_1 \quad (11a)$$

Stel $r_1 = R$, de straal van de aarde, en $r_2 = R + h$, de hoogte van het vliegtuig, dan wordt dit:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2(R+h)} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_1 \quad (12a)$$

Snelheden en gravitationele effecten

In deze uitdrukking:

- v_1 is de rotatiesnelheid van een punt op het aardoppervlak (richting oost),
- v_2 is de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van het universele referentiekader.

Beide snelheden werden eerder afgeleid in [vergelijking 14b](#) en [vergelijking 15b](#) van hoofdstuk [4.1.5](#)

Het tijdsverschil tussen het vliegtuig en de aarde is dus:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2(R+h)} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (14b)$$

Door gebruik te maken van de Schwarzschildstraal $R_s = \frac{2GM}{c^2}$, herschrijven we dit als:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{R_s}{(R+h)} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{R_s}{R} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (15b)$$

Conclusie

Deze vergelijking is een exacte uitdrukking, rechtstreeks afgeleid uit de Schwarzschild-metrick. Ze toont hoe het verschil in eigen tijd tussen een klok op aarde en een klok in een vliegtuig beïnvloed wordt door:

- **Gravitationele tijdsdilatatie:** Klokken op grotere hoogte (zwakkere zwaartekracht) lopen sneller.
- **Kinematische tijdsdilatatie:** Klokken die sneller bewegen lopen trager.

Berekeningen gebaseerd op de uitgevoerde experimenten:

	PaulAnderson	Re_Spec_92	H&K
Vplane_ground_east_tau	232.55	670	173.98
Vplane_ground_West_tau	-232.55	-670	-124.43
Vplane2_east in dt	232.88	672.00	174.19
Vplane2_west in dt	-232.88	-672.00	-124.62
V_earth_tau	464.58	464.58	464.58
V_earth_t	464.58	464.58	464.58
V_earth_east on plane level dt	465.24	465.97	465.14
V_earth_west on plane level dt	465.24	465.97	465.28
H_east	9000	19000	7664
H_west	9000	19000	9526
t_earth	172328	59746.528	172328
Result (with formula above):			
Grav_delay (ns)_East	169.46	124.03	144.31
Kin_delay (ns)_East	-260.32	-358.69	-184.94
Total_East	-9.09E-08	-2.35E-07	-4.06E-08
Grav_delay (ns)_West	169.46	124.03	179.37
Kin_delay (ns)_West	155.16	57.63	95.67
Total_West	3.25E-07	1.82E-07	2.75E-07
Exact:			
Total_East (ns)	-9.11E-08	-2.35E-07	-4.08E-08
Total_West	3.24E-07	1.81E-07	2.75E-07
diff east	2.35E-10	3.63E-10	1.56E-10
diff west	2.18E-10	3.67E-10	2.58E-10
diff east in %	-0.26%	-0.15%	-0.38%
diff west in %	0.07%	0.20%	0.09%
sidereal day: 23.9344696hr	86164.1	86164.1	86164.1
Lightvelocity	299792458	299792458	299792458
G	6.67E-11	6.67E-11	6.67E-11
M_earth	5.97E+24	5.97E+24	5.97E+24
R_earth	6371000	6371000	6371000
Schwarzschild radius Rs:	8.87E-03	8.87E-03	8.87E-03

Conclusie:

De benaderingen zijn correct binnen een nauwkeurigheid van 0.4%

Praktische Toepassing

- **Rotatiesnelheid aarde (evenaar):** v_{earth} is ongeveer 464.58 m/s (op basis van de sterrendag).

- **Vliegtuig:** Snelheid t.o.v. aardoppervlak, gecorrigeerd voor hoogte.
- **Hoogte-effect:** h is typisch enkele kilometers, R (aarde) ongeveer $6.371 * 10^6 \text{ m}$.

Resultaten en Interpretatie

- **Oostwaarts vliegende klok:** Grotere snelheid t.o.v. het aardcentrum → sterkere kinematische tijdsdilatatie → klok loopt achter.
- **Westwaarts vliegende klok:** Lagere snelheid t.o.v. het aardcentrum → zwakkere tijdsdilatatie → klok loopt voor.
- **Gravitationeel effect:** Klokken op grotere hoogte (vliegtuigen) lopen sneller door zwakkere zwaartekracht.

Experimentele Uitkomst

- De gemeten tijdsverschillen kwamen exact overeen met de voorspellingen van de algemene relativiteitstheorie, met een nauwkeurigheid van minder dan 0,4%.
- Zowel de benaderde als de exacte formules (afgeleid uit de Schwarzschild-metrick) zijn in overeenstemming met de waarnemingen.

Samenvatting

- Het Hafele–Keating-experiment is een directe, kwantitatieve bevestiging van Einsteins relativiteitstheorie.
- De Schwarzschild-metrick biedt het wiskundige kader voor het verklaren van deze tijdsdilatatie-effecten.
- **Beide effecten — beweging en zwaartekracht — zijn essentieel en worden simultaan gemeten en verklaard.**

4.1.4 De Snelheid van een Stilstaand Punt op de Evenaar aan het Aardoppervlak

Om de snelheid van een stilstaand punt op de evenaar te berekenen, moeten we eerst de rotatietijd van de aarde bepalen: de **sterrendag** (*sidereal day*).

Sterrendag versus etmaal

Een gewone dag of **etmaal** (24 uur) is de tijd tussen twee opeenvolgende hoogste standen van de zon aan de hemel. Deze tijd is gebaseerd op de **zonnecyclus**, niet op de werkelijke rotatie van de aarde.

Door de jaarlijkse baan van de aarde rond de zon, maakt de aarde in een jaar **één extra rotatie** ten opzichte van de vaste sterrenhemel. In één jaar (365,25 zonne-etmalen) draait de aarde daarom **366,25 keer** om haar as t.o.v. de sterren.

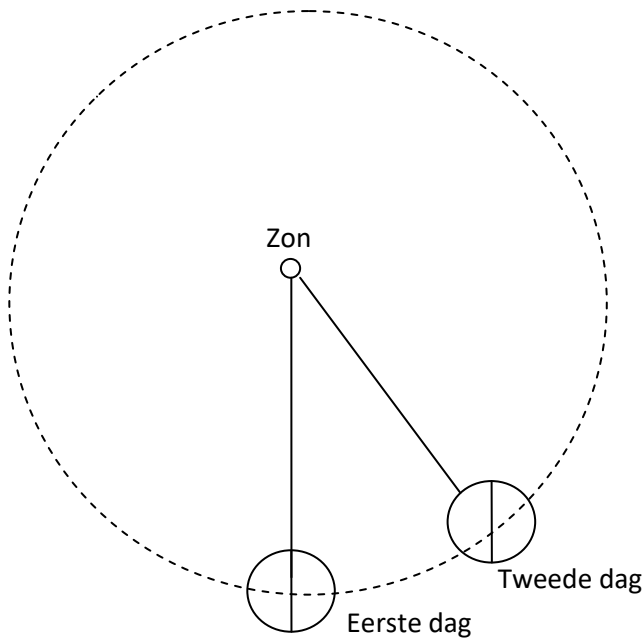
Daaruit volgt de duur van één sterrendag:

$$T_{sidereal} = \frac{365.25}{366.25} * 24 * 3600 = 86164.1 \text{ seconden.}$$

Dit is omgerekend:

$$\frac{86164.1}{3600} = 23.93447 \text{ uur}$$

⇒ Of wel 23 uur, 56 minuten en 4 seconden.



Snelheid op de evenaar

Met de straal van de aarde $R=6371 \text{ km}$, oftewel $6.371 * 10^6 \text{ m}$, kunnen we de omtrek aan de evenaar berekenen:

$$Omtrek = 2\pi R = 2\pi \times 6,371 \times 10^6 \approx 4,003 \times 10^7 \text{ m}$$

De snelheid van een stilstaand punt op de evenaar (ten opzichte van een niet-meedraaiend referentiekader) is dan:

$$v_{earth} = \frac{2\pi R}{T_{sider eal}} = \frac{4.003 * 10^7}{86164.1} = 464.58 \text{ m/s}$$

Ter vergelijking: Als we ten onrechte een dag van 24 uur zouden nemen, krijgen we:

$$v = \frac{2\pi R}{86400} = 463.3 \text{ m/s}$$

Samenvatting

- Een **sterrendag** duurt ongeveer **23 uur, 56 minuten en 4 seconden**.
- De snelheid van een stilstaand punt op de **evenaar** is ongeveer **464,58 m/s**.
- Het verschil tussen een sterrendag en een zonne-etmaal leidt tot een meetbaar verschil in snelheid, belangrijk voor relativistische berekeningen zoals in het Hafele–Keating-experiment.

4.1.5 Correctie op afleiding gebaseerd op Paul Anderson

In de oorspronkelijke afleiding van Anderson wordt de snelheid van het vliegtuig ingevoerd ten opzichte van het aardoppervlak. In zijn formule [3.1.1.3](#) is deze snelheid echter uitgedrukt ten opzichte van de coördinatietijd dt , terwijl de klokken in beweging eigen tijd $d\tau$ meten. Dit vereist een correctie: de snelheid van het object moet worden uitgedrukt ten opzichte van zijn eigen klok, dus via $d\tau$.

Startpunt: De volledige Schwarzschild-relatie

We nemen als uitgangspunt vergelijking [2](#) uit hoofdstuk [4.1.1](#), zonder benadering:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2 \quad (2)$$

Delen door c^2 geeft:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 d\tau^2 \quad (3b)$$

$$d\tau^2 \left[1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right] = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 \quad (3c)$$

$$d\tau = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2}} dt \quad (4b)$$

Met:

$$v_\tau = r \frac{d\phi}{d\tau} \quad (4c)$$

Dus:

$$d\tau_1 = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)}{\sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}}} dt \quad (7b)$$

$$d\tau_2 = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{v_2^2}{c^2}}} dt \quad (8b)$$

$$d\tau_2 = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right) \left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)} d\tau_1 \quad (9b)$$

Daaruit volgt de vergelijking tussen beide eigen tijden:

$$\tau_2 = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right) \left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)} \cdot \tau_1 \quad (10b)$$

Als we $\tau_1 = \tau_{earth}$ nemen (klok op zeeniveau) en $\tau_2 = \tau_{plane}$, wordt:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right) \left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (11b)$$

Hier is $r_1 = R$, de straal van de aarde. De afstand van de klok in een vliegtuig is dan $R + h$:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 (R + h)}\right) \left(1 + \frac{v_{earth}^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (14b)$$

Of met Schwarzschild-radius $R_s = \frac{2GM}{c^2}$:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{\left(1 - \frac{R_s}{(R + h)}\right) \left(1 + \frac{v_{earth}^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{R_s}{R}\right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (15b)$$

Relatieve snelheid op vlieghoogte

De grondsnelheid van het vliegtuig (relatief t.o.v. het aardoppervlak) moet worden omgerekend naar een coördinatenonafhankelijke snelheid op vlieghoogte:

$$v_2 = (v_{earth} + v_{plane \text{ relatief to earth point}}) \cdot \frac{R+h}{R}$$

Tot nu toe is de formule zonder benaderingen.

Na eerste-orde Taylorbenaderingen van vergelijking (14b), zoals eerder gedaan, wordt het resultaat:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\left(1 - \frac{GM}{c^2(R+h)} \right) \left(1 + \frac{GM}{c^2 R} \right) \left(1 + \frac{v_{earth}^2}{2c^2} \right) \left(1 - \frac{v_2^2}{2c^2} \right) - 1 \right) \tau_{earth} \quad (16)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \right) \left(1 + \frac{(v_{earth}^2 - v_2^2)}{2c^2} \right) - 1 \right) \tau_{earth} \quad (17)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\left(1 + \frac{GM}{c^2} \frac{h}{R^2} \right) \left(1 + \frac{(v_{earth}^2 - v_2^2)}{2c^2} \right) - 1 \right) \tau_{earth} \quad (18)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{GM}{c^2} \frac{h}{R^2} + \frac{(v_{earth}^2 - v_2^2)}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (19)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{(v_2^2 - v_{earth}^2)}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (20)$$

Opmerking:

De snelheid van het vliegtuig wordt gegeven als de grondsnelheid. Het is niet direct duidelijk of deze gemeten is ten opzichte van de klok op aarde of de klok in het vliegtuig. Laten we aannemen dat de klok op aarde bedoeld is. In dat geval moeten we een conversie maken naar het niveau van het vliegtuig, wat betekent dat we de klok op dat niveau moeten beschouwen. Dit doen we via de tijd t in het universele frame. Als we $\frac{d\phi_{earth}}{dt}$ beschouwen, is dit de rotatiesnelheid van de aarde in het universele frame. We kunnen de snelheid van de aarde op zeeniveau vinden door $\frac{d\phi_{earth}}{dt}$ te vermenigvuldigen met R , de afstand vanaf het middelpunt. De snelheid van de aarde gezien vanaf het niveau van het vliegtuig is $(R+h) \frac{d\phi_{earth}}{dt}$. Voor het vliegtuig geldt hetzelfde, op zeeniveau is de relatieve vliegtuigsnelheid $R \frac{d\phi_{plane}}{dt}$ en op vliegtuigniveau $(R+h) \frac{d\phi_{plane}}{dt}$. Nu moeten $\frac{d\phi_{earth}}{dt}$ en $\frac{d\phi_{plane}}{dt}$ worden gevonden.

We gebruiken uit hoofdstuk [4.1.5 vergelijking 4c](#)

$$v_r = r \frac{d\phi}{d\tau} = r \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_r}{r} \frac{d\tau}{dt}$$

Vervolgens gebruiken we uit hoofdstuk [4.1.5 vergelijking 3 1 5 4b](#)

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{1 + \frac{v_r^2}{c^2}}}$$

Dus:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v_r}{r} \frac{d\tau}{dt} = \frac{v_r}{r} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{1 + \frac{v_r^2}{c^2}}}$$

Alle componenten aan de rechterkant zijn bekend.

Op zeeniveau:

$$\frac{d\phi_{earth\ h}}{dt} = \frac{v_{earth\ h}}{R} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}{1 + \frac{v_{earth\ h}^2}{c^2}}}$$

En voor het vliegtuig geldt analoog:

$$\frac{d\phi_{plane}}{dt} = \frac{v_{plane}}{R} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}{1 + \frac{v_{earth\ h}^2}{c^2}}}$$

Nu op vliegtuigniveau:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_{2\tau_{earth\ h}} + v_{2\tau_{plane}} = (R + h) \left(\frac{d\phi_{earth\ h}}{dt} + \frac{d\phi_{plane}}{dt} \right) \\ v_2 &= v_{2\tau_{earth\ h}} + v_{2\tau_{plane}} = \frac{(R + h)}{R} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}{1 + \frac{v_{earth\ h}^2}{c^2}}} (v_{earth\ h} + v_{plane}) \end{aligned}$$

Tot nu toe was v_2 nog exact.

Maar nu met een eerste-orde Taylorbenadering wordt:

$$v_2 = \frac{(R + h)}{R} \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \left(1 - \frac{v_{earth\ h}^2}{c^2}\right)} (v_{earth\ h} + v_{plane})$$

Dus, de relevante formules zijn:

$$v_2 = \frac{(R + h)}{R} \left(1 - \frac{GM}{c^2 R} - \frac{v_{earth\ h}^2}{2c^2} \right) (v_{earth\ h} + v_{plane})$$

Resultaat na Taylorbenadering

Toegepast op vergelijking (14b), leidt dit na linearisatie tot

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{(v_2^2 - v_{earth}^2)}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (20)$$

Conclusie:

Deze herziene aanpak corrigeert de inconsistentie in de oorspronkelijke afleiding: snelheden dienen gerelateerd te zijn aan eigen tijd, niet aan coördinatietijd. Na correctie en Taylorbenadering blijkt dat de numerieke afwijking t.o.v. de benadering in het vorige hoofdstuk **minder dan 0,4%** bedraagt - binnen de gewenste nauwkeurigheid.

Exact	Paul Anderson	Re_Spec_92	H&K
Total_East	-9.11E-08	-2.35E-07	-4.08E-08
Total_West	3.24E-07	1.81E-07	2.75E-07
sidereal day: 23.9344696hr	86164.1	86164.1	86164.1
Lightvelocity	299792458	299792458	299792458
G	6.67E-11	6.67E-11	6.67E-11
M_earth	5.97E+24	5.97E+24	5.97E+24
R_earth	6371000	6371000	6371000
Schwarzschild radius Rs:	8.87E-03	8.87E-03	8.87E-03
With Formula above:			
Vplane_ground_east_tau	232.55	670	173.98
Vplane_ground_West_tau	-232.55	-670	-124.43
V_earth_tau	464.58	464.58	464.58
H_east	9000	19000	7664
H_west	9000	19000	9526
t_earth	172328	59747	172328
v2_east	698.12	1137.96	639.33
v2_west	232.36	-206.03	340.56
Grav_delay (ns)_East	1.69E-07	1.24E-07	1.44E-07
Kin_delay (ns)_East	-2.60E-07	-3.59E-07	-1.85E-07
Total_East	-9.09E-08	-2.35E-07	-4.06E-08
Grav_delay (ns)_West	1.69E-07	1.24E-07	1.79E-07
Kin_delay (ns)_West	1.55E-07	5.76E-08	9.57E-08
Total_West	3.25E-07	1.82E-07	2.75E-07
diff east	-2.35E-10	-3.63E-10	-1.56E-10
diff west	-2.18E-10	-3.67E-10	-3.23E-10
diff east in %	0.26%	0.15%	0.38%
diff west in %	-0.07%	-0.20%	-0.12%

4.1.6 Overwegingen bij het Hafele-Keating-experiment en de Schwarzschild-metrick

We beginnen met de algemene Schwarzschild vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

Zoals eerder gehanteerd, definiëren we:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

Met deze notatie wordt vergelijking (1) herschreven als:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1a)$$

In het Hafele-Keating-experiment worden de tijd van de klok van het United States Naval Observatory (USNO) en de snelheid van een vliegtuig gemeten. De vraag luidt: wat vertegenwoordigen de tijd en de snelheid in de context van de Schwarzschild-metrick?

Er is een stationaire klok op zeeniveau op de evenaar, en twee vliegtuigen die zich bewegen in het equatoriale vlak - één naar het oosten, de ander naar het westen. Beide vliegtuigen volgen een cirkelvormige baan met constante snelheid ten opzichte van het aardoppervlak, maar in tegengestelde richtingen.

Aangezien het experiment plaatsvindt in het equatoriale vlak, nemen we aan dat $\theta = \frac{\pi}{2}$ constant is, en dat r eveneens constant is wegens de cirkelvormige baan. De Schwarzschild-metrick vereenvoudigt zich dan tot:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2 \quad (2)$$

De coördinaten (t, r, θ, ϕ) in de Schwarzschild-metrick kunnen worden geïnterpreteerd als behorend tot een universeel (inertiaal) referentiestelsel waarin de aarde roteert. De klokken op het aardoppervlak en in de vliegtuigen bevinden zich elk in hun eigen, lokaal inertiaal stelsel; hun gemeten tijd wordt weergegeven als de eigen tijd τ .

De universele coördinatietijd t is niet direct meetbaar, maar vormt een theoretische grootheid. Vanuit vergelijking (2) volgt:

$$dt^2 = \frac{d\tau^2 + \frac{r^2}{c^2} d\phi^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} = \sigma^{-2} \left(d\tau^2 + \frac{r^2}{c^2} d\phi^2 \right) = \sigma^{-2} \left(1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right) d\tau^2 \quad (4)$$

Onder de aanname $t=0$ wanneer $\tau = 0$, leidt dit tot:

$$t = \sigma^{-1} \sqrt{1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2} \tau = \sigma^{-1} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tau \quad (4a)$$

Waarbij $v = r \frac{d\phi}{d\tau}$ de snelheid is ten opzichte van het universele frame. Voor snelheden veel kleiner dan c , kunnen we een eerste-orde Taylorbenadering toepassen:

$$t = \sigma^{-1} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tau = \frac{1}{\sigma \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tau = \frac{\gamma}{\sigma} \tau \quad (4b)$$

met $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ de Lorentzfactor. Deze vergelijking drukt uit hoe de eigen tijd τ van een bewegende klok relateert aan de coördinatietijd t in het Schwarzschild-stelsel.

4.2 Experiment 2 - Beweging van Deeltjes in Schwarzschild-Geometrie

De afleidingen in dit hoofdstuk zijn grotendeels gebaseerd op de volgende bronnen:

- (Biesel, 2008) *The Precession of Mercury's Perihelion*, Owen Biesel, 25 januari 2008 (Biesel, 2008)
- (Magnan) Christian Magnan: *Complete calculations of the perihelion precession of Mercury and the deflection of light by the Sun in General Relativity* (Magnan)
- (Pe'er1, 2014) *Schwarzschild Solution and Black Holes*, Asaf Pe'er1, 19 februari 2014 (Pe'er1, 2014)

We zullen vergelijkingen afleiden voor de beweging van deeltjes in de Schwarzschild-geometrie, die als basis dient voor de volgende experimenten:

- De precessie van het perihelium van Mercurius,
- De afbuiging van licht door de zon,
- Het Shapiro-experiment
- De berekening van een kogelbaan.

We gebruiken de Schwarzschild-metrick als uitgangspunt, omdat deze exact voldoet aan de veldvergelijkingen van Einstein en breed toepasbaar is gebleken. Vanwege de symmetrie in zowel de tijd t als de hoekcoördinaat ϕ – d.w.z. geen van de metrickcoëfficiënten hangt van t of ϕ af – is de Schwarzschild-metrick onderhevig aan de stelling van Noether. Deze stelt dat iedere continue symmetrie in het actieprincipe correspondeert met een behoudswet. Hieruit volgt behoud van energie (door tijdsonafhankelijkheid) en behoud van impulsmoment (door ϕ -onafhankelijkheid).

Schwarzschild-metriek

De metriek luidt:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - \frac{r^2}{R_p^2} dR_p^2 \cdot \theta^2 - \frac{r^2}{R_p^2} \sin^2 \theta dR_p^2 \cdot \phi^2$$

Om de juiste dimensies te verkrijgen (alle coördinaten in meters), zetten we $R_p=1m$, waardoor de coëfficiënten dimensieloos worden. Dit leidt tot de meer gebruikelijke vorm:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1a)$$

met:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}, \text{ waarbij } R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Coëfficiënten van de metriek

Voor de metriek in sferische coördinaten vinden we:

$$g_{00} = \sigma^2; \quad g_{11} = \frac{-1}{\sigma^2}; \quad g_{22} = -r^2; \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Voor het equatoriale vlak $\theta = \frac{\pi}{2}$ geldt dus $g_{33} = -r^2$.

De contravariante componenten zijn:

$$g^{00} = \frac{1}{\sigma^2}; \quad g^{11} = -\sigma^2; \quad g^{22} = \frac{-1}{r^2}; \quad g^{33} = \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Verder geldt:

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{R_s}{2r^2 \sigma}$$

Afgeleiden van metriekcomponenten

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial r} = \frac{R_s}{r^2}; \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{R_s}{r^2 \sigma^4};$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -2r;$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial r} = -2r \sin^2 \theta;$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = -2r^2 \sin \theta \cos \theta$$

Niet-nul Christoffel-symbolen

Christoffel-symbolen zijn gegeven door:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

Enkele relevante niet-nul symbolen zijn:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{R_s}{2r^2\sigma^2}; \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2}; \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right\} = \frac{-R_s}{2r^2\sigma^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = -r\sigma^2; \quad \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = -r\sigma^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Alle anderen Christoffel-symbolen zijn nul

Geodetische vergelijking en behoudswetten

We beschouwen een geodetische wereldlijn, die de natuurlijke bewegingsbaan van een deeltje beschrijft in afwezigheid van niet-gravitationele krachten. De algemene vorm van de geodetische vergelijking is:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0$$

We werken de vier coördinaten uit, waarbij λ de affiene parameter is (maar hier gelijkgesteld kan worden aan de eigen tijd τ):

- Voor t :

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^t \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{01}^0 \cdot \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + 2 \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \cdot \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0$$

- Voor r :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^r \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} &= \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^1 \cdot \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{11}^1 \cdot \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{22}^1 \cdot \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{33}^1 \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \\ &= \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \cdot \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \cdot \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r\sigma^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 - r\sigma^2 \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

- Voor θ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\theta} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} &= \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{12}^2 \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} + \Gamma_{33}^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \\ &= \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \cos \theta \sin \theta \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

- Voor φ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\varphi} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} &= \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{13}^3 \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^3 \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} \\ &= \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0\end{aligned}$$

Samengevat leiden deze vier componentvergelijkingen tot:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + 2\frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r\sigma^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - r\sigma^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + 2\frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \quad (4)$$

We zullen eerst de elegante aanpak van Asaf Pe'er volgen uit zijn artikel "Schwarzschild Solution and Black Holes" (Pe'er1, 2014), om vervolgens een eenvoudigere benadering te presenteren.

Volgens Asaf Pe'er:

"Op het eerste gezicht lijkt er niet veel hoop te zijn om dit stel van vier gekoppelde vergelijkingen eenvoudig op te lossen. Gelukkig wordt onze taak sterk vereenvoudigd door de hoge mate van symmetrie van de Schwarzschild-metrick."

De Schwarzschild-ruimte heeft vier Killing-velden: drie vanwege de sferische symmetrie, en één vanwege tijdtranslatie. Elk Killing-veld leidt via Noether's stelling tot een constante van de beweging voor een vrij deeltje. Als K_{μ} een Killing-veld is, geldt:

$$K_{\mu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = \text{constant}. \quad (5)$$

Daarnaast is er altijd nog een andere constante van beweging die volgt uit metrische compatibiliteit. Deze zegt dat langs de geodetische wereldlijn de grootte

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \\ \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{cd\tau}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon = g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\end{aligned} \quad (6)$$

constant is. Dit is de normalisatie van de vier-snelheid. Hierbij is $\varepsilon = 1$ voor massieve deeltjes, $\varepsilon = 0$ voor massalose deeltjes (zoals fotonen), en $\varepsilon = -1$ voor ruimtelijke geodeten.

In plaats van direct de vier gekoppelde geodetische vergelijkingen op te lossen, maken we gebruik van de symmetrieën die via Killing-velden leiden tot behoudswetten.

In vlakke ruimte-tijd leiden de symmetrieën, vertegenwoordigd door de Killing-velden en volgens de stelling van Noether, tot zeer bekende behouden grootheden:

- Tijdtranslatie-invariantie resulteert in energiebehoud,
- Rotatie-invariantie in behoud van impulsmoment.

Voor Schwarzschild geldt analoog:

- **Beweging in een vlak:** Impulsmoment behoudt zijn richting → deeltje beweegt in een vlak. Door coördinatenrotatie mogen we dat kiezen als het evenaarsvlak:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

- **Behoud van energie:** Het tijdachtige Killing-veld is $K^\mu = (1,0,0,0)^T$, en dus:

$$K_\mu = K^\nu g_{\mu\nu} = \left(\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right), 0, 0, 0 \right) \quad (8)$$

Daarmee volgt:

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{c^2}, \quad (9)$$

of gedefinieerd als:

$$k = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{c^2} \quad (9a)$$

- **Behoud van impulsmoment:** De Killing-vector geassocieerd met ϕ -rotaties is $L^\mu = (0,0,0,-1)^T$, en:

$$L_\mu = g_{\mu\nu} L^\nu = (0,0,0,-r^2 \sin^2 \theta). \quad (10)$$

Bij $\theta = \frac{\pi}{2}$ is $\sin \theta = 1$ zodat:

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L \quad (11)$$

Hieruit volgen de behouden grootheden: E en L , de energie en het impulsmoment per eenheid massa. Voor fotonen zijn dit respectievelijk de energie en het impulsmoment zelf. (meer over het impulsmoment, zie [Appendix 10.](#))

Merk op dat vergelijking (11) het equivalent is van Keplers tweede wet binnen de algemene relativiteit: gelijke oppervlakken worden in gelijke tijden doorlopen.

Alternatieve afleiding:

Hoewel Asaf Pe'er opmerkt dat het oplossen van de volledige set gekoppelde geodetische vergelijkingen complex lijkt, blijkt dat een aantal van deze vergelijkingen relatief eenvoudig oplosbaar zijn. We zullen dit aantonen door gebruik te maken van de vergelijkingen (3.2.1) en (3.2.4).

We beginnen met vergelijking (3.2.1):

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + 2 \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0$$

Waarbij

$$\sigma^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{R_s}{r}$$

We vermenigvuldigen beide zijden met σ^2 :

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{R_s}{r^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0 \\ \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{R_s}{r^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

We herschrijven dit:

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{R_s}{r^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \frac{R_s}{r} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} = 0$$

Of:

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dt}{d\lambda} - \frac{R_s}{r} \frac{dt}{d\lambda} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \right] = 0$$

Dit toont aan dat de uitdrukking

$$\frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)$$

constant is langs de wereldlijn. We herkennen hierin de behouden grootheid die gerelateerd is aan de totale energie per massa-eenheid van het deeltje. Vermenigvuldiging met c geeft:

$$\frac{cdt}{d\lambda} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = \text{constant} = \frac{E}{c} \quad (\text{total energy}) \quad (9)$$

We gaan nu verder met vergelijking (3.2.4). Om de afleiding te vereenvoudigen, nemen we aan dat het deeltje zich beweegt in het equatoriale vlak, zodanig $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dan wordt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

We herschrijven dit als:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = 0$$

Wat betekent dat ook:

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$

een constante is langs de geodetische wereldlijn. Deze constante herkennen we als het impulsmoment per eenheid massa:

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \text{constant} = L \text{ (impulsmoment)} \quad (11)$$

Door de symmetrieën zijn er dus twee behouden grootheden:

- **Energie per eenheid massa:**

$$\left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{c^2}$$

- **Impulsmoment per eenheid massa:**

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$

4.2.1 Het Gravitatiepotentiaal

Met de eerder afgeleide behoudswetten kunnen we nu de beweging van deeltjes in de Schwarzschild-metrick verder analyseren. We beginnen met het uitschrijven van vergelijking (6), waarbij we gebruikmaken van de behouden grootheden uit vergelijkingen (10) en (11):

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = c^2 \varepsilon. \quad (12)$$

Invullen van de behouden grootheden E en L geeft:

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} = c^2 \varepsilon$$

We vermenigvuldigen deze vergelijking met $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)$ en gebruiken $E/c = c \frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)$ en $L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$ om te herschrijven:

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(\frac{L^2}{r^2} + c^2 \varepsilon \right) = 0$$

Invullen van de uitdrukking voor E leidt tot:

$$\frac{E^2}{c^2} - \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(\frac{L^2}{r^2} + c^2 \varepsilon \right) = 0. \quad (13)$$

We zijn hiermee in staat geweest om de vier gekoppelde geodetische vergelijkingen te reduceren tot één differentiaalvergelijking voor $r(\lambda)$. Dit betekent een grote vereenvoudiging van het probleem.

We herschrijven vergelijking (13) in de volgende vorm:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2}. \quad (14)$$

met de effectieve potentiaal $V(r)$ gedefinieerd als:

$$V(r) = \frac{1}{2} c^2 \varepsilon - \varepsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3}. \quad (15)$$

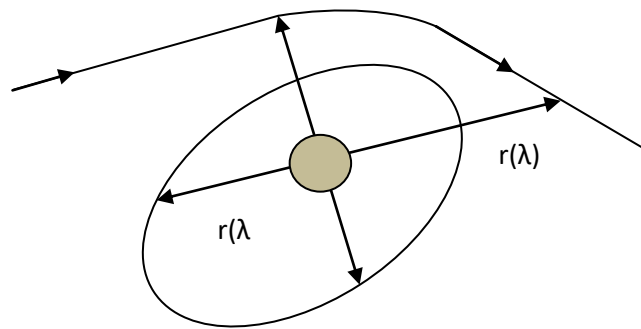
Vergelijking (14) is formeel identiek aan de klassieke vergelijking voor de beweging van een deeltje (met eenheidsmassa) in een één-dimensionaal potentiaal $V(r)$, waarbij de totale “energie” $\frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2}$ is. Natuurlijk is de werkelijke energie E , maar deze vorm maakt de vergelijking analoog aan de klassieke mechanica.

Als we het potentiaal $V(r)$ in vergelijking (15) analyseren, zien we dat het slechts op één punt verschilt van het Newtoniaanse potentiaal: de laatste term. Deze term, die evenredig is met $1/r^3$, vertegenwoordigt een puur relativistische correctie en speelt vooral bij kleine r een belangrijke rol.

De termen kunnen als volgt geïnterpreteerd worden:

- De eerste term is constant (rustenergie voor massieve deeltjes) (afhankelijk van $\varepsilon = 1$ voor massieve deeltjes en $\varepsilon = 0$ voor fotonen),
- De tweede term is het Newtoniaanse gravitationele potentiaal,
- De derde term is het klassieke impulsmomentpotentiaal,
- De vierde term is de relativistische correctie.

Let op: ondanks de vormelijke overeenkomst met klassieke mechanica beschrijft dit géén deeltje dat vrij in één dimensie beweegt. In werkelijkheid gaat het hier om een deeltje dat in een baan rond een massief object beweegt. De grootheden van belang zijn $r(\lambda)$, maar ook $t(\lambda)$ en $\phi(\lambda)$, die samen het ruimte-tijdtraject beschrijven (zie Figuur 1).



Figuur 1 - Trajecten van deeltjes in een gravitationeel potentiaal.

4.2.2 Intermezzo over Energie in Schwarzschild-geometrie

In dit intermezzo analyseren we de vorm van de energie zoals afgeleid in vergelijking (3.2.9) van hoofdstuk (4.2). Deze energie is een behouden grootte in de Schwarzschild-geometrie.

We beginnen bij de relatie:

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{mc^2} = \sigma^2 \frac{dt}{d\lambda}, \quad (9)$$

Waaruit volgt:

$$E = \sigma^2 mc^2 \frac{dt}{d\lambda}$$

De Schwarzschild-metrik luidt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Om de situatie rond het beginpunt $\tau = 0$ te vermijden, gebruiken we een affiene parameter λ , met $d\tau = d\lambda$. Vervolgens beperken we ons tot het equatoriale vlak ($\theta = \pi/2$), waardoor de metrik vereenvoudigt.

De norm van de 4-snelheid geeft dan:

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon.$$

Door te herschrijven naar snelheden ten opzichte van de coördinaattijd t , verkrijgen we:

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon$$

Voor deeltjes met massa geldt $\varepsilon = 1$:

$$\sigma^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{\sigma^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}{\sigma^2 c^2}\right) = \varepsilon = 1 \quad (9a)$$

$$\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}$$

Waaruit volgt:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sigma \sqrt{1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}}}$$

Waarbij $v^2 = \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$ de totale snelheid is. In combinatie met de energie (vergelijking 9) leidt dit tot:

$$E = \sigma^2 mc^2 \frac{dt}{d\lambda}$$

Dus:

$$E = \frac{\sigma mc^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}\right)}}$$

$$E = \gamma_\sigma \sigma mc^2$$

Deze uitdrukking geeft de totale behouden energie. Hieruit kunnen we drie componenten onderscheiden:

- **Rustenergie:** $E = \sigma mc^2$
- **Relativistische kinetische energie:**

$$E_{kin} = \sigma mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}\right)}} - 1 \right]$$

In het niet-relativistische limiet $v \ll c$, en met een eerste-orde-Taylorontwikkeling van de wortel, vinden we de “kinetische” energie:

$$E_{kin} \approx \sigma mc^2 \left[1 + \frac{v^2}{2\sigma^2 c^2} - 1 \right] = \frac{mv^2}{2\sigma}$$

4.2.2.1 Alternatieve benadering via de metriek

Begin met de Schwarzschild-vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon$$

Vermenigvuldig met σ^2 :

$$\sigma^4 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^2 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \sigma^2 c^2 \varepsilon$$

Gebruik opnieuw:

$$E = \sigma^2 m c^2 \frac{dt}{d\lambda} \Rightarrow \frac{E}{m c} = \sigma^2 c \frac{dt}{d\lambda}$$

En schrijf:

$$\left(\frac{E}{m c}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \sigma^2 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 + \sigma^2 c^2 \varepsilon$$

Stel

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{m} \Rightarrow r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \frac{L^2}{r^2 m^2} = \frac{(m v_t r)^2}{r^2 m^2} = v_t^2$$

Nu nemen we $\lambda = \tau$ en $\varepsilon = 1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{m c}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \sigma^2 v_t^2 + \sigma^2 c^2 = v_r^2 + \sigma^2 v_t^2 + \sigma^2 c^2 \\ \left(\frac{E}{c}\right)^2 &= m^2 v_r^2 + m^2 \sigma^2 v_t^2 + m^2 \sigma^2 c^2 \end{aligned}$$

Waar

$$v_r = \frac{dr}{d\tau}, \text{ en } v_t = r \frac{d\phi}{d\tau}$$

De termen in deze uitdrukking interpreteren we als volgt:

- $m v_r$: radiale impuls
- $m \sigma v_t$: transversale impuls
- $\sigma m c^2$: rustenergie

De kinetische energie is dan:

$$E_{kin} = m c \sqrt{v_r^2 + \sigma^2 v_t^2}$$

4.2.2.2 Derde benadering: via een relativistische energie-impulsrelatie

Start opnieuw met de norm van de 4-snelheid:

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon$$

Waaruit volgt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{\sigma c}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 &= c^2 \varepsilon \\ \left(\frac{E}{\sigma c}\right)^2 - p^2 &= c^2 \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{E}{\sigma c}\right)^2 = c^2 \varepsilon + p^2 \end{aligned}$$

Schrijf dit als:

$$E^2 = \sigma^2 c^4 \varepsilon + \sigma^2 p^2 c^2$$

waar p het totale ruimtelijke momentum per eenheid massa is. In rust volgt $E = \sigma m c^2$, voor een foton $E = \sigma p c$, en in het algemeen

Of:

$$E^2 = \sigma^2 m^2 c^4 \varepsilon + \sigma^2 m^2 c^2 U^2$$

waarbij

$$U^2 = (dx^\mu / d\tau)^2 = \sigma^{-2} (dr/d\tau)^2 + r^2 (d\phi/d\tau)^2$$

de kwadratische norm is van de ruimtelijke snelheid. Voor massieve deeltjes ($\varepsilon = 1$) en eenheid massa wordt dit:

$$E^2 = \sigma^2 c^4 + \sigma^2 c^2 U^2$$

4.2.3 Samenvatting

- De Schwarzschild-metrick en de daaruit afgeleide geodetische vergelijkingen vormen het fundament voor het verklaren van een breed scala aan experimenten in de algemene relativiteit.
- Door gebruik te maken van symmetrieën en behouden grootheden (Noether's stelling), worden de complexe bewegingsvergelijkingen tot hanteerbare vormen gereduceerd.
- De effectieve potentiaal bevat alle klassieke en relativistische effecten die in experimenten als de precessie van Mercurius, lichtafbuiging, Shapiro-tijdvertraging en kogelbanen worden gemeten.

4.3 Experiment 3 - Afbuiging van Licht

4.3.1 Historische en theoretische achtergrond

De afbuiging van licht door zwaartekracht was de eerste experimentele toets van de algemene relativiteitstheorie. In de klassieke Newtoniaanse zwaartekracht beweegt licht, als massaloos verschijnsel, in rechte lijnen die niet door zwaartekracht worden beïnvloed. Volgens de algemene relativiteitstheorie echter, volgt licht de kromming van de ruimte-tijd, veroorzaakt door massa. Daardoor wijkt een lichtstraal af van een rechte lijn wanneer zij passeert langs een massief object zoals de zon.

Dit effect kan waargenomen worden wanneer we kijken naar het licht van een ster die zich visueel dicht bij de zon bevindt. Wanneer het licht van de ster langs de zon schampt, wordt het afgebogen, zodat de ster op een andere plaats aan de hemel lijkt te staan dan waar zij zich werkelijk bevindt. Een half jaar later, als de ster zich aan de andere kant van de hemel bevindt, zal haar licht de zon op grote afstand passeren, en wordt haar positie correct waargenomen.

Om dit effect zichtbaar te maken is een zonsverduistering nodig, omdat het zonlicht anders het sterlicht overstraalt. In 1919 werd dit effect voor het eerst gemeten door Arthur Eddington tijdens een totale zonsverduistering. Zijn waarnemingen bevestigden Einsteins voorspelling, en betekenden een grote doorbraak in de acceptatie van de algemene relativiteitstheorie.

4.3.2 De afleiding van de afbuigingshoek

We beschouwen een lichtstraal (foton) die nadert vanuit het oneindige en langs de zon beweegt. De beweging van het foton in de Schwarzschild-ruimte wordt beschreven door de effectieve energievergelijking, zoals afgeleid in hoofdstuk 4.2.1 (vergelijkingen 3.2.1.14 en 3.2.1.15). Voor een foton geldt $\varepsilon = 0$, zodat:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2}. \quad (14)$$

Samen met:

$$V(r) = \frac{1}{2} c^2 \varepsilon - \varepsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3} \quad (15)$$

Waarbij L het impulsmoment en E de energie van het foton zijn.

Invoegen in (14) en wetende dat voor een foto geldt $\varepsilon = 0$, geeft :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2}.$$

We delen deze uitdrukking door L^2 en vermenigvuldigen met 2:

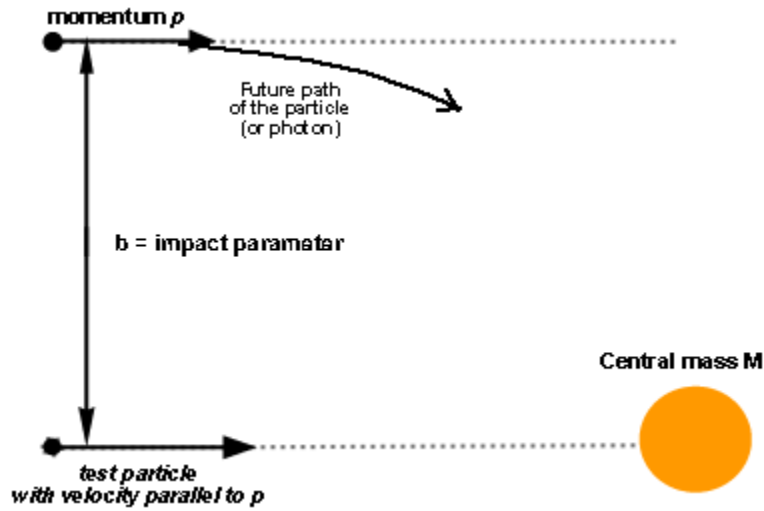
$$\begin{aligned} \frac{1}{L^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2GM}{c^2 r^3} &= \frac{E^2}{c^2 L^2}. \\ \frac{1}{L^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) &= \frac{E^2}{c^2 L^2} \end{aligned}$$

Isoleren van $(dr/d\lambda)^2$ levert:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = L^2 \left[\frac{E^2}{c^2 L^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right] \quad (16)$$

4.3.3 Impactparameter en impulsmoment

De **impactparameter** b is de afstand tussen de zwaartelijn van het massieve object (de zon) en de asymptotische richting van de lichtstraal op oneindig (zie figuur 2).



Figuur 2. Definitie van de impactparameter b . Het bewegende deeltje nadert de massa M vanuit een grote afstand met vector-moment p . Een testdeeltje met een parallelle snelheid duikt radiaal op de massa M af. De afstand b tussen hun aanvankelijk parallelle paden in het 'oneindige' is de impactparameter b .

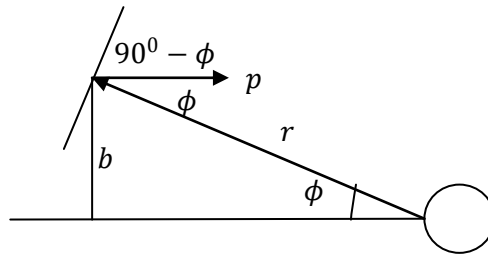
Het **impulsmoment** L van het foton is dan:

$$L = pb \quad (17)$$

Voor een foton geldt $E=pc$, zodat:

$$b = \frac{L}{E/c} \quad (18)$$

Extra verduidelijking van de relatie (17) en (18):



Het impulsmoment is $L = p \sin \phi \cdot r = p \cdot r \sin \phi = p \cdot b$

De energie in het algemeen is $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$; en voor een foton geldt $m=0$, dus $E=pc$.

Dus:

$$\frac{L}{E/c} = \frac{pb}{pc/c} = b$$

Hieruit kunnen we ook afleiden dat:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{E^2}{c^2 L^2} \quad (18a)$$

4.3.4 Afleiding van het pad: de baanvergelijking voor het foton

Gebruikmakend van vergelijking [vergelijking 4 2 11](#), ($r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L$) vinden we:

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^{-1}$$

Samen met (16) levert dit:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^{-1} = \pm \frac{L}{r^2} \frac{1}{L} \left[\frac{E^2}{c^2 L^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right]^{-1/2}$$

Met (18a) wordt dit:

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right]^{-1/2} \quad (19)$$

Dit leidt tot de differentiaalvergelijking:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \quad (20)$$

4.3.5 De integratie van het pad

De afbuigingshoek wordt verkregen door de hoekverandering $\Delta\phi$ langs het traject van het foton te berekenen, van oneindig tot aan het perihelium $r=R$, en weer terug. Vanuit (19) krijgen we:
(Zie Figuur 3).

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right]^{-1/2} \quad (21)$$

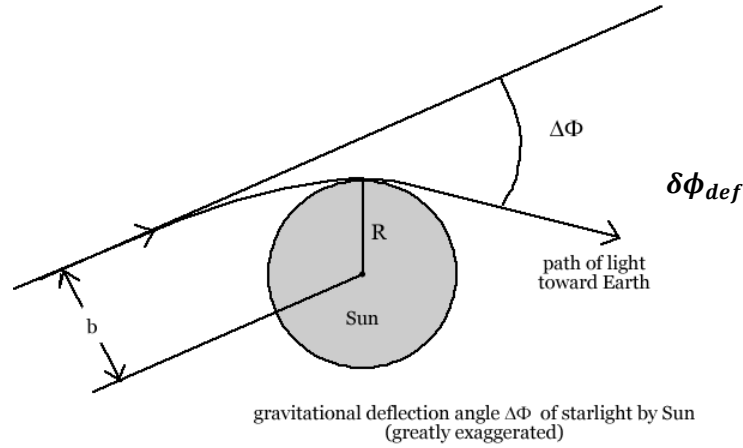


Fig. 3- Afbuiging van licht door hoek $\delta\phi_{def}$

Op het keerpunt $r = R$ geldt $dr/d\phi = 0$, zodat uit (20) volgt:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right) \quad (22)$$

Vervang dit in (20):

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \quad (23)$$

4.3.6 Variabele substitutie

Voer de volgende substitutie uit::

$$u = \frac{R}{r}$$

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = \frac{-R}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \Rightarrow \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \left(\frac{R}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2$$

Waarbij u varieert tussen 1 ($r=R$) en 0 ($r=\infty$). Vergelijking (23) wordt dan:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right) - u^2 \left(1 - \frac{2GMu}{c^2 R} \right)$$

Of:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = 1 - u^2 - \frac{2GM}{c^2 R} (1 - u^3) \quad (24)$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
d\phi &= \left[1 - u^2 - \frac{2GM}{c^2 R} (1 - u^3) \right]^{-\frac{1}{2}} du \\
&= \frac{(1 - u^2)^{-1/2}}{\left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} (1 - u^3) (1 - u^2)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}} du
\end{aligned} \tag{25}$$

Deze integraal is lastig op te lossen in gesloten vorm. Om haar eenvoudiger te maken, gebruiken we de substitutie:

$$u = \cos \alpha \text{ met } 0 < \alpha < \pi/2 \text{ dus } 0 < u < 1$$

Dan wordt:

$$d\phi = - \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} (1 - \cos^3 \alpha) \sin^{-2} \alpha \right]^{-\frac{1}{2}} d\alpha \tag{26}$$

Door in te zien dat:

$$\frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \frac{1 + \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha)} = \cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)}$$

Krijgen we uiteindelijk:

$$d\phi = - \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\alpha \tag{27}$$

Met:

$$\cos \alpha = R/r$$

Tot op dit punt is **geen enkele benadering** toegepast. Deze volledige afleiding is geschikt om de lichtafbuiging exact te berekenen, al is in de praktijk vaak een eerste-orde benadering voldoende om de afbuigingshoek langs de rand van de zon te bepalen.

4.3.6.1 Benaderingen en Integratie.

De waarde van de parameter

$$\frac{2GM}{c^2 R} \approx 4.24 \cdot 10^{-6}$$

is zeer klein aan het oppervlak van de zon. Hierdoor kunnen we gebruikmaken van een benadering om de integraal in vergelijking (27) op te lossen.

We passen de bekende Taylor-benadering toe:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k}} \approx 1 + \frac{1}{2} k \quad \text{voor kleine } k$$

Toegepast op vergelijking (27) levert dit:

$$d\phi = - \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\alpha$$

Of:

$$d\phi = - \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right]}} d\alpha$$

Na benadering:

$$d\phi \approx - \left[1 + \frac{GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right] d\alpha \quad (28)$$

We kunnen nu de totale verandering in het azimut berekenen langs het volledige traject van het foton, van $\alpha = 0$ tot $\alpha = \frac{\pi}{2}$, en dit verdubbelen:

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right] d\alpha \quad (29)$$

Om deze integraal uit te werken, bekijken we de tweede term apart:

Om de integraal

$$\int \frac{1}{1 + \cos \alpha} d\alpha$$

We gebruiken de goniometrische identiteit:

$$1 + \cos \alpha = 1 + \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

Dus:

$$\frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Merk op dat:

$$\frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{d \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)}{d \left(\frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{d \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)}{d\alpha}$$

Dus

$$\int \frac{1}{1 + \cos \alpha} d\alpha = \tan \frac{\alpha}{2}$$

Nu kunnen we de volledige integraal (29) evalueren:

$$\Delta\phi = 2 \left[\alpha + \frac{GM}{c^2 R} \left(\sin \alpha + \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (30)$$

We vullen in:

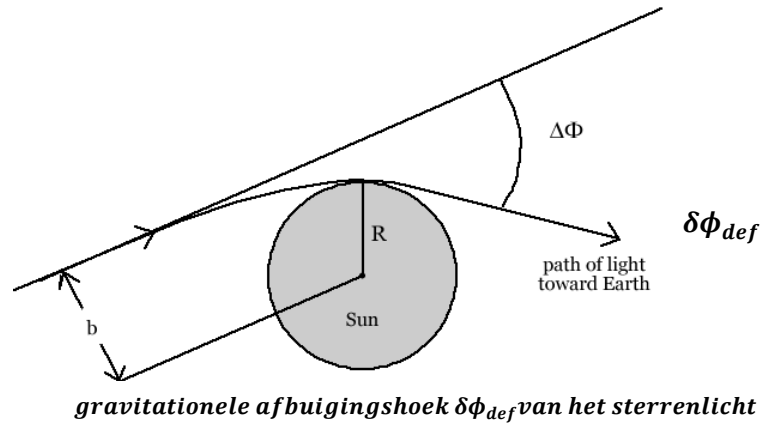
- $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
- $\alpha = 0$: $\sin(0) = 0, \tan(0) = 0$

Dus:

$$\Delta\phi = 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{GM}{c^2 R} (1 + 1) \right] = \pi + \frac{4GM}{c^2 R}$$

$$\Delta\phi = \pi + \frac{4GM}{c^2 R} \quad (31)$$

Opmerking: de integraal zou van $r = \infty$ naar R moeten gaan, dus nu gaat u van 0 naar 1, en dus α van $\frac{\pi}{2}$ naar 0. Door de integraal te veranderen naar 0 tot $\frac{\pi}{2}$ verandert het teken en verdwijnt het minteken.



De eerste term, π , is de totale hoekverandering van een foton in een vlakke ruimte-tijd – een rechte baan zonder afbuiging. De tweede term is de extra afbuiging ten gevolge van de kromming van de ruimte-tijd. De werkelijke afbuigingshoek is dus:

$$\delta\phi_{def} = \Delta\phi - \pi \approx \frac{4GM}{c^2 R} \quad (32)$$

Numerieke waarde

Met:

- $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
- $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- $R_{\odot} = 6.963 \cdot 10^8 \text{ m}$

vinden we:

$$\delta\phi_{def} = \frac{4 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}}{(3.00 \cdot 10^8) \cdot 6.963 \cdot 10^8} \approx 8.5 \cdot 10^{-6} \text{ radialen}$$

Om dit om te zetten in boogseconden, gebruiken we:

$$1 \text{ rad} = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} \approx 206.265''$$

Daaruit volgt:

$$\delta\phi_{def} \approx 8.5 \cdot 10^{-6} \cdot 206.265 \approx 1.75''$$

4.3.7 Conclusie

Deze afbuiging van 1.75 boogseconde werd voor het eerst waargenomen door Arthur Eddington tijdens de zonsverduistering van 1919. Het resultaat bevestigde op spectaculaire wijze Einsteins voorspelling, en betekende een mijlpaal in de experimentele bevestiging van de algemene relativiteitstheorie.

Dit effect is ook te zien buiten ons zonnestelsel, en staat bekend als “gravitational lensing”.

4.3.8 Fysische Interpretatie

- **Licht volgt de kromming van ruimte-tijd:**
Nabij een massa als de zon wordt het pad van licht afgebogen; de ster lijkt op een andere plek aan de hemel te staan.
- **Geen kracht op het foton:**
De afbuiging is een puur geometrisch effect, niet het gevolg van een kracht op het lichtdeeltje.
- **Praktisch effect:**
Zichtbaar tijdens een zonsverduistering, wanneer sterren dicht bij de zon aan de hemel lijken te verschuiven.

4.3.9 Kernpunten en Intuïtie

- De afbuiging van licht is een direct gevolg van de kromming van ruimte-tijd rond massa.
- De Schwarzschild-metrick levert een kwantitatieve voorspelling die experimenteel is bevestigd.
- Dit experiment was cruciaal voor de vroege acceptatie van de algemene relativiteitstheorie.

4.4 Experiment 4 - Precessie van de Periheliën (Mercurius)

Gebaseerd op artikel van Owen Biesel ([Biesel, 2008](#)).

4.4.1 Inleiding

- **Fysisch probleem:**
De baan van Mercurius rond de zon is een ellips, maar het dichtstbijzijnde punt (perihelium) schuift langzaam door in de tijd. Dit verschijnsel heet precessie van het perihelium.
- **Klassieke verklaring:**
Newtoniaanse mechanica verklaart het grootste deel van deze precessie (door invloed van andere planeten), maar er blijft een residu van ca. 43 boogseconden per eeuw onverklaard.
- **Relativistische verklaring:**
De algemene relativiteitstheorie voorspelt een extra precessie als gevolg van de kromming van ruimte-tijd rond de zon, exact overeenkomend met het waargenomen overschot.

4.4.2 Theoretisch kader: Schwarzschild-metriek

In de algemene relativiteitstheorie beschouwen we een planeet zoals Mercurius als een testdeeltje dat zich langs een geodetische baan beweegt door de gekromde ruimte-tijd.

- De Schwarzschild-metriek beschrijft deze ruimte-tijd rondom een sferisch symmetrische massa (zoals de zon):

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (33)$$

met:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}, \quad \text{waarbij } R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

- Voor een planeet die beweegt in het equatoriale vlak ($\theta = \frac{\pi}{2}$) vereenvoudigt dit tot:

$$1 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

4.4.3 Afleiding van de precessie via de Lagrange-aanpak (zie Appendix 12)

Hoewel we eerder al de uitdrukkingen voor de energie E ([vergelijking 3.2 9](#)) en het impulsmoment L ([vergelijking 3.2 11](#)) hebben afgeleid, herhalen we hier de afleiding vanuit de Lagrangiaan. We parameteriseren

de baan als $x^\mu(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ met τ de eigentijd. In het equatoriale vlak ($\theta = \pi/2$) wordt de Lagrangiaan:

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \quad (34)$$

De Euler-Lagrange-vergelijkingen voor ϕ en t geven:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \dot{\phi} \text{ en } \frac{dt}{d\tau} = \dot{t} \\ \mathcal{L} &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

4.4.4 Euler-Lagrange operatie:

$$\text{Hier is voor } \phi: \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\text{en voor } t: \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Dan geldt voor de Euler-Lagrange-vergelijkingen voor ϕ en t :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(2 \frac{1}{c^2} r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) \Rightarrow r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \text{constant} = L \\ 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \right) \Rightarrow \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \text{constant} = \frac{E}{c^2} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat L (het impulsmoment per eenheid massa) en E (de energie per eenheid massa) bewegingsconstanten zijn.

We herschrijven de oorspronkelijke normvoorwaarde:

$$1 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

en substitueren de constanten E en L erin:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\frac{E^2}{c^4}}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{L^2}{r^2} \\ 1 - \frac{R_s}{r} &= \frac{E^2}{c^4} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \frac{L^2}{r^2} + \frac{1}{c^2} \frac{L^2 R_s}{r^3} \\ \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) + c^2 \frac{R_s}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{R_s L^2}{r^3} \end{aligned}$$

Door:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{L}{r^2} \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$$

Verkrijgen we:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2} \left[c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) + \frac{c^2 R_s}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{R_s L^2}{r^3} \right]$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = (\text{Newtonse termen}) + \text{relativistische correctie}$$

De extra $\frac{R_s L^2}{r^3}$ term in de potentiaal zorgt voor de precessie van het perihelium.

Na vereenvoudiging:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) r^4 + \frac{c^2 R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r$$

Hieruit leiden we af:

$$d\phi = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) r^4 + \frac{c^2 R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r}} dr$$

4.4.5 Precessie van de baan

Voor een gesloten baan moet de radiale beweging begrensd zijn, d.w.z. $dr/(d\phi) = 0$ bij twee punten: het perihelium P en het aphelium A . De hoekverschuiving tussen deze twee punten is:

$$\phi_A - \phi_P = \int_P^A \frac{dr}{\sqrt{\frac{c^2}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) r^4 + \frac{c^2 R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r}} \quad (35)$$

Om E en L in termen van A , P en R_s uit te drukken, stellen we dat $dr/(d\phi) = 0$ voor $r=A$ en $r=P$. Dit leidt tot de volgende vergelijkingen:

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) A^4 + (L^2)(-A^2 + R_s A) = -c^2 R_s A^3 \quad (36)$$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) P^4 + (L^2)(-P^2 + R_s P) = -c^2 R_s P^3 \quad (37)$$

Door geschikte combinaties en aftrekkingen van deze vergelijkingen kunnen we $\frac{E^2}{c^4} - 1$ en L^2 volledig uitdrukken in termen van A , P en R_s . (Details zie oorspronkelijke afleiding.)

Vermenigvuldig (36) met $(-P^2 + R_s P)$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) A^4 (-P^2 + R_s P) + (L^2) (-A^2 + R_s A) (-P^2 + R_s P) = -c^2 R_s A^3 (-P^2 + R_s P)$$

Vermenigvuldig (37) met $(-A^2 + R_s A)$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) P^4 (-A^2 + R_s A) + (L^2) (-P^2 + R_s P) (-A^2 + R_s A) = -c^2 R_s P^3 (-A^2 + R_s A)$$

Trek deze twee vergelijkingen van elkaar af:

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) [A^4 (-P^2 + R_s P) - P^4 (-A^2 + R_s A)] = -c^2 R_s A^3 (-P^2 + R_s P) + c^2 R_s P^3 (-A^2 + R_s A)$$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-c^2 R_s A^3 (-P^2 + R_s P) + c^2 R_s P^3 (-A^2 + R_s A)}{[A^4 (-P^2 + R_s P) - P^4 (-A^2 + R_s A)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [A^3 (-P^2 + R_s P) - P^3 (-A^2 + R_s A)]}{[A^4 (-P^2 + R_s P) - P^4 (-A^2 + R_s A)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [A^3 P (-P + R_s) - P^3 A (-A + R_s)]}{[A^4 P (-P + R_s) - P^4 A (-A + R_s)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s A P [A^2 (-P + R_s) - P^2 (-A + R_s)]}{A P [A^3 (-P + R_s) - P^3 (-A + R_s)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [A^2 (-P + R_s) - P^2 (-A + R_s)]}{[A^3 (-P + R_s) - P^3 (-A + R_s)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [-P A^2 + R_s A^2 + A P^2 - R_s P^2]}{[-P A^3 + R_s A^3 + A P^3 - R_s P^3]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [-A P (A - P) + R_s (A^2 - P^2)]}{[-A P (A^2 - P^2) + R_s (A^3 - P^3)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s (A - P) [-A P + R_s (A + P)]}{(A - P) \left[-A P (A + P) + R_s \frac{(A^3 - P^3)}{A - P} \right]}$$

Intermezzo om $\frac{(A^3 - P^3)}{A - P}$ uit te werken:

$$(A^2 - P^2)(A + P) = A^3 - A P^2 + A^2 P - P^3$$

$$A^3 - P^3 = (A^2 - P^2)(A + P) - A P (A - P)$$

$$A^3 - P^3 = (A - P)(A + P)(A + P) - A P (A - P)$$

$$\Rightarrow \frac{A^3 - P^3}{A - P} = (A + P)^2 - A P$$

Nu vullen we het resultaat in:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) &= \frac{-R_s(A - P)[-AP + R_s(A + P)]}{(A - P)[-AP(A + P) + R_s(A + P)^2 - R_sAP]} \\
\left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) &= \frac{-R_s[-AP + R_s(A + P)]}{[-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2]} \\
\left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) &= \frac{R_s[-AP + R_s(A + P)]}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}
\end{aligned} \tag{36a}$$

Nu kunnen we L^2/c^2 vinden door dezelfde methode toe te passen op vergelijkingen (36) en (37):

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) A^4 + (L^2)(-A^2 + R_s A) = -c^2 R_s A^3 \tag{36}$$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) P^4 + (L^2)(-P^2 + R_s P) = -c^2 R_s P^3 \tag{37}$$

Vermenigvuldig 36 met A :

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) A^4 P^4 + (L^2)(-A^2 + R_s A) P^4 = -c^2 R_s A^3 P^4$$

Vermenigvuldig 37 met P :

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) A^4 P^4 + (L^2)(-P^2 + R_s P) A^4 = -c^2 R_s A^4 P^3$$

Nu aftrekken:

$$(L^2)[(-A^2 + R_s A)P^4 - (-P^2 + R_s P)A^4] = -c^2 R_s A^3 P^4 + c^2 R_s A^4 P^3$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^3 P^3 [-P + A]}{(-A^2 + R_s A)P^4 - (-P^2 + R_s P)A^4}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^3 P^3 [-P + A]}{(-A + R_s)AP^4 - (-P + R_s)PA^4}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^3 P^3 [-P + A]}{AP[(-A + R_s)P^3 - (-P + R_s)A^3]}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^2 P^2 [-P + A]}{[(-A + R_s)P^3 - (-P + R_s)A^3]}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^2 P^2 [-P + A]}{A^3 P - AP^3 - (A^3 - P^3)R_s}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^2 P^2 [-P + A]}{AP(A^2 - P^2) - (A^3 - P^3)R_s}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^2 P^2}{AP(A + P) - R_s(A + P)^2 + APR_s}$$

$$L^2 = \frac{c^2 R_s A^2 P^2}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

$$\frac{L^2}{c^2} = \frac{R_s A^2 P^2}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

Uiteindelijk krijgen we de vergelijking (36a) van boven en de vergelijking van $\frac{L^2}{c^2}$:

$$\frac{E^2}{c^4} - 1 = \frac{-APR_s + (A + P)R_s^2}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

$$\frac{L^2}{c^2} = \frac{A^2 P^2 R_s}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

Vervolgens kunnen we de variabele:

$$D = \frac{AP}{A + P}$$

introduceren om de uitdrukkingen verder te vereenvoudigen. Dit heeft de dimensie van afstand.

Dan wordt de uitdrukking hierboven voor $E^2 - 1$ en L^2 :

$$\frac{E^2}{c^4} - 1 = \frac{(-R_s/AP) + (R_s^2/DAP)}{\frac{1}{D} + \left(\frac{R_s}{AP}\right) - \left(\frac{R_s}{D^2}\right)}$$

$$\frac{L^2}{c^2} = \frac{R_s}{\frac{1}{D} + \left(\frac{R_s}{AP}\right) - \left(\frac{R_s}{D^2}\right)}$$

$$\frac{\frac{L^2}{c^2}}{\frac{E^2}{c^4} - 1} = \frac{R_s}{(-R_s/AP) + (R_s^2/DAP)} = \frac{AP}{-1 + R_s/D}$$

$$\frac{\frac{L^2}{c^2 AP}}{1 - \frac{E^2}{c^4}} = \frac{1}{1 - R_s/D} \quad (38)$$

We willen een uitdrukking voor ϵ , de derde niet-nul wortel van:

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} r^4 + \frac{R_s}{L^2/c^2} r^3 - r^2 + R_s r = 0$$

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} \left[r^4 + \frac{R_s}{\frac{E^2}{c^4} - 1} r^3 - \frac{\frac{L^2}{c^2}}{\frac{E^2}{c^4} - 1} r^2 + \frac{\frac{L^2}{c^2}}{\frac{E^2}{c^4} - 1} R_s r \right] = 0$$

Dit geeft dus de drie niet-nul wortels: A, P and ϵ .

De volledige uitdrukking wordt:

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} (r - A)(r - P)(r - \epsilon)r$$

Laten we de vier factoren uitwerken:

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} [r^4 - (A + P + \varepsilon)r^3 + \{AP + \varepsilon(A + P)\}r^2 - \varepsilon AP r]$$

We weten dat de som van de drie niet-nulwortels gelijk is aan $\frac{R_s}{E^2/c^4 - 1}$ (de coëfficiënt van r^3 in de standaardvorm van het polynoom); daarom verkrijgen we:

$$-(A + P + \varepsilon) = R_s \frac{1}{E^2/c^4 - 1}$$

Dit stelt ons in staat om de relatie tussen de wortels A , P en ε verder te analyseren in termen van R_s , de Schwarzschildstraal, en de energie- en impulsmomenttermen.

Uit bovenstaande weten we dat:

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) = \frac{R_s[-AP + (A + P)R_s]}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

Dus we vullen dit in de bovenstaande vergelijking:

$$\begin{aligned} A + P + \varepsilon &= R_s \frac{-1}{E^2/c^4 - 1} \\ A + P + \varepsilon &= R_s \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2}{R_s[-AP + (A + P)R_s]} = \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2}{-AP + (A + P)R_s} \\ \varepsilon &= \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2}{-AP + (A + P)R_s} - (A + P) \\ &= \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2 + AP(A + P) - (A + P)^2 R_s}{-AP + (A + P)R_s} \\ \varepsilon &= \frac{-AP(A + P + R_s) + AP(A + P)}{-AP + (A + P)R_s} = \frac{-APR_s}{-AP + (A + P)R_s} = \frac{R_s}{1 - \frac{(A + P)R_s}{AP}} = \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}} \end{aligned}$$

Wat geeft:

$$\varepsilon = \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}} \quad (39)$$

Nu kunnen we (35) benaderen door te schrijven

$$\begin{aligned} \frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} r^4 + \frac{R_s}{L^2/c^2} r^3 - r^2 + R_s r &= \frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} (r - A)(r - P)(r - \varepsilon)r \\ &= \frac{1 - E^2/c^4}{L^2/c^2} (A - r)(r - P)(r - \varepsilon)r. \end{aligned}$$

We verkrijgen:

$$\begin{aligned}
\phi_A - \phi_P &= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{r(A-r)(r-P)(r-\varepsilon)}} dr \\
&= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{r^2(A-r)(r-P)\left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)}} dr \\
&= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1/2} dr
\end{aligned}$$

Nu gebruiken we de Taylorreeksontwikkeling $\left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2r}$, met een fout ε begrensd door:

$$|\varepsilon| \leq \frac{3}{8} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-5/2} \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2 \leq \frac{3}{8} \left(1 - \frac{\varepsilon}{A}\right)^{-5/2} \left(\frac{\varepsilon}{P}\right)^2$$

wat produceert:

$$= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \left[\frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr \quad (40)$$

Opmerking:

In zijn artikel "The Precession of Mercury's Perihelion" van Owen Biesel (25 januari 2008), op pagina 8, daar bevat het linkerdeel van de integraal (40) in de teller $1 + \varepsilon$, maar wij zijn van mening dat het alleen 1 moet zijn en hebben de formule dienovereenkomstig aangepast.

De **eerste integraal van (40)** (uitwerking zie [4.4.6.1](#) en [4.4.6.3](#)) in gesloten vorm:

$$\begin{aligned}
&= \int_P^A \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \arctan \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right]_P^A \\
&\rightarrow \frac{1}{\sqrt{AP}} [\arctan[+\infty] - \arctan[-\infty]] = \frac{1}{\sqrt{AP}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{AP}} \pi
\end{aligned}$$

De **tweede integraal van (40)** (uitwerking zie [4.4.6.2](#)) is lastiger, maar kan in gesloten vorm worden geëvalueerd:

$$\int_P^A \frac{\varepsilon/2}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \frac{\pi\varepsilon/2}{2\sqrt{AP}} \frac{A+P}{AP} = \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{\pi\varepsilon}{4D}$$

Als we nu herkennen dat:

$$\frac{L^2/c^2 AP}{1 - E^2/c^4} = \frac{1}{1 - R_s/D}$$

en:

$$\varepsilon = \frac{R_s}{1 - R_s/D}$$

(zie (38) en (39) hierboven), dan vinden we dat:

$$\begin{aligned}\phi_A - \phi_P &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \pi \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} + \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{\pi \varepsilon}{4D} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \\ \phi_A - \phi_P &= \pi \sqrt{\frac{L^2/c^2 AP}{1 - E^2/c^4}} + \frac{\pi \varepsilon}{4D} \sqrt{\frac{L^2/c^2 AP}{1 - E^2/c^4}} = \pi \sqrt{\frac{1}{1 - R_s/D}} + \frac{\pi \varepsilon}{4D} \sqrt{\frac{1}{1 - R_s/D}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4D}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - R_s/D} \frac{R_s}{D}\right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R_s/D}{1 - R_s/D}\right)\end{aligned}$$

Met de waargenomen waarden $A(\text{phelion}) = 69.8 \cdot 10^6 \text{ km}$, en $P(\text{erihelion}) = 46.0 \cdot 10^6 \text{ km}$, verkrijgen we:

$$D = 27.7 \cdot 10^6 \text{ km}, \text{ en } R_s = \frac{2GM}{c^2} = 2.95 \text{ km}$$

En kunnen we de term als volgt benaderen:

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R_s/D}{1 - R_s/D}\right) \approx \pi + 2.512 \cdot 10^{-7}$$

Dit levert een betrouwbare schatting van $\phi_A - \phi_P$ op (een halve omwenteling, in radialen).

Dit geeft:

$$\Delta\phi = 2.512 \cdot 10^{-7} \text{ radialen voor een halve omwenteling}$$

En

$$\Delta\phi = 5.024 \cdot 10^{-7} \text{ radialen voor een hele omwenteling}$$

De omlooptijd van Mercurius is 87,969 dagen, dus Mercurius voltooit 415,2 omwentelingen per eeuw.

Aangezien er $360 \cdot 60 \cdot 60 / 2\pi$ boogseconden per radiaal zijn, vinden we dat het perihelium van Mercurius verschuift met:

$$\Delta\phi = (5.024 \cdot 10^{-7}) \left(\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi}\right) \cdot 415.2 = 43.027 \text{ boogseconden per eeuw.}$$

$$\Delta\phi = \mathbf{43.027 \text{ boogseconden per eeuw.}}$$

Opmerking:

Volgens Asaf Pe'er, voor een kleine afbuigingshoek, geeft het resultaat (zie vergelijking 6 hoofdstuk 4.7):

$$\delta\phi_{prec} = \frac{6\pi GM_{\text{sun}}}{c^2 a(1 - \varepsilon^2)} \quad (41)$$

Waarbij voor Mercurius:

- a is de halve lange as: $5.79 * 10^{10}$ m
- ε is de excentriciteit: 0.206
- M is massa van de zon: $1.989 * 10^{30}$ kg
- G is de gravitatieconstante: $6.674 * 10^{-11}$ Nm²kg⁻²
- c is de lichtsnelheid: $3 * 10^8$ m/s²

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2} = 5.02 * 10^{-7} \text{ rad per omwenteling}$$

Om de precessie per eeuw te berekenen:

$$\Delta\phi = 5.02 * 10^{-7} * \left(100 * \frac{365.25}{88}\right) * \left(\frac{360 * 60 * 60}{2\pi}\right)$$

$$\Delta\phi = 43'' \text{ (boogseconden per eeuw).}$$

Wat dus tot hetzelfde resultaat leidt.

Dit geeft ons de exacte relatie voor de precessiehoek van de baan van Mercurius, zoals beschreven in het resultaat van 43.027 boogseconden per eeuw.

4.4.6 Conclusie

De afwijking van de baan van Mercurius als gevolg van algemene relativiteit wordt bepaald door de extra krommingstermen in vergelijking (35). De feitelijke precessie per omloop kan worden berekend door de afwijking van de integraal $\Delta\phi$ ten opzichte van 2π . Deze theoretische voorspelling komt overeen met de waargenomen afwijking van ongeveer **43 boogseconden per eeuw**, een effect dat niet door Newtoniaanse mechanica verklaard kan worden.

4.4.6.1 We Controleren de Eerste Integraal.

Controle van de integrand:

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{\sqrt{AP}} \arctan \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \right\} \stackrel{?}{=} \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}}$$

We weten dat:

$$\frac{d\arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Daarom:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{d}{dr} \left\{ \arctan \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{1}{1 + \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right]^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{-(r-P) + (A-r) + 2r}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{AP\{(A-r)(r-P) + r^2 - AP\}\{-(r-P) + (A-r)\}}{4\{(A-r)(r-P)AP\}^{3/2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{A+P}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{AP\{Ar - AP - r^2 + rP + r^2 - AP\}\{-r + P + A - r\}}{4\{(A-r)(r-P)AP\}^{3/2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{A+P}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} - \frac{AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4\{(A-r)(r-P)AP\}^{3/2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \left[\frac{2(A+P)}{4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} * \\
&\quad \left[\frac{2(A+P)(A-r)(r-P)AP - AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{2(A+P)(A-r)(r-P)AP - AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{2(A+P)(A-r)(r-P)AP - AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{2(A+P)(A-r)(r-P) - \{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{(2A^2 - 2Ar + 2AP - 2Pr)(r-P) - \{APr - 2AP^2 + rP^2 + A^2r - 2A^2P + APr - 2Ar^2 + 4APr - 2Pr^2\}}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - r^2 - AP + Pr + r^2 - AP]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{(2A^2 - 2Ar + 2AP - 2Pr)(r-P) - \{6APr - 2AP^2 + P^2r + A^2r - 2A^2P - 2Ar^2 - 2Pr^2\}}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{2A^2r - 2Ar^2 + 4APr - 2Pr^2 - 2A^2P - 2AP^2 + 2P^2r - 6APr + 2AP^2 - P^2r - A^2r + 2A^2P + 2Ar^2 + 2Pr^2}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{A^2r - 2APr + P^2r}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A^2 - 2AP + P^2)}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + A^2r^2 + 4A^2P^2 + P^2r^2 - 4A^2Pr + 2APr^2 - 4AP^2r} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{-2APr^2 + A^2r^2 + P^2r^2} = \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{r^2(-2AP + A^2 + P^2)}
\end{aligned}$$

Dit wordt uiteindelijk:

$$= \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{r^2(A-P)^2}$$

Wat resulteert in:

$$= \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}}$$

Dus:

$$\frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}}$$

Dit bevestigt dat de bewerking van de integraand correct is!!

4.4.6.2 Uitwerking van de Tweede Integraal in het Vorige Hoofdstuk.

We hebben de uitdrukking voor de tweede integraal afgeleid:

Algemene vorm:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = -\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{cx} - \frac{b}{2c} \int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

(Zie ook het volgende hoofdstuk voor de uitwerking van de integraal aan de rechterkant.)

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = -\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{cx} - \frac{b}{2c\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}}, (c < 0)$$

Nu met $a = -1$, $b = A + P$ en $c = -AP$

$$\begin{aligned}
\phi_A - \phi_P &= \int_P^A \frac{\varepsilon/2}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \int_P^A \frac{\varepsilon/2}{r^2\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \\
&= -\varepsilon/2 \left[\frac{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}}{-APr} \right]_P^A + \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left[\arcsin \frac{(A+P)r - 2AP}{|r|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} \right]_P^A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A+P)A - 2AP}{|A|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} - \arcsin \frac{(A+P)P - 2AP}{|P|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} \right\} \\
&= \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A-P)A}{|A|(A-P)} - \arcsin \frac{(P-A)P}{|P|(A-P)} \right\} \\
&= \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \{ \arcsin(1) - \arcsin(-1) \} \\
&= \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} = \varepsilon/2 \frac{\pi(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} = \frac{\pi\varepsilon}{4D\sqrt{AP}}
\end{aligned}$$

Dit komt overeen met de berekeningen.

4.4.6.3 Alternatieve Oplossing voor Integraal 1.

Volgens de oplossingen gegeven in [Wikipedia: https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen](https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen) is:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, (c < 0)$$

Dus:

$$\begin{aligned}
\phi_A - \phi_P &= \int_P^A \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \int_P^A \frac{1}{r\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \arcsin \left[\frac{(A+P)r - 2AP}{|r|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} \right]_P^A \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A+P)A - 2AP}{|A|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} - \arcsin \frac{(A+P)P - 2AP}{|P|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A-P)A}{|A|(A-P)} - \arcsin \frac{(P-A)P}{|P|(A-P)} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \{ \arcsin(1) - \arcsin(-1) \} \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{AP}}
\end{aligned}$$

4.4.6.4 Gedetailleerde Berekening van de Tijd T van een Omwenteling.

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \Rightarrow d\tau = \frac{r^2}{L} d\phi \Rightarrow T = \int d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{L} d\phi$$

Gebruikmakend van vergelijking 40:

$$\begin{aligned}
 d\phi &= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \left[\frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr \\
 d\tau &= \frac{r^2}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \left[\frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr \\
 d\tau &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \left[\frac{r}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr \\
 \Delta T &= \int d\tau = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \int_P^A \left[\frac{r}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr
 \end{aligned} \tag{40}$$

Eerst de uitwerking van de linkerintegraal:

$$\int_P^A \frac{r}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \int_P^A \frac{r}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \tag{41}$$

Volgens de lijst van integralen ([Wikipedia](https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen)): (https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen)

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \tag{42}$$

En:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, (a < 0)$$

Om de linkerintegraal om te zetten naar de integraalformule:

$$\begin{aligned}
 &\int_P^A \frac{r}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr = \\
 &= \left[\frac{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}}{-1} \right]_P^A - \frac{(A+P)}{-2} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \\
 &= -\sqrt{-A^2 + (A+P)A - AP} + \sqrt{-P^2 + (A+P)P - AP} + \frac{(A+P)}{2} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \\
 &= -0 + 0 + \frac{(A+P)}{2} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr
 \end{aligned}$$

Nu alleen de integraal:

$$\begin{aligned}\int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr &= \left[\arcsin \frac{2r - (A+P)}{\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} + C \right]_P^A = \\ &= \arcsin \frac{2A - (A+P)}{\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} + C - \arcsin \frac{2P - (A+P)}{\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} - C \\ &= \arcsin \frac{A-P}{A-P} - \arcsin \frac{-A+P}{A-P} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

Dus, de linkerintegraal levert:

$$\frac{(A+P)\pi}{2}$$

De rechterintegraal levert:

$$\pi \frac{\varepsilon}{2}$$

De som is:

$$\frac{\pi}{2}((A+P) + \varepsilon)$$

Dus, de totale integraal voor een volledige omwenteling is:

$$\Delta T = 2 \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \frac{\pi}{2} ((A+P) + \varepsilon)$$

Met:

$$\varepsilon = \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}}$$

$$\Delta T = 2 \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \frac{\pi}{2} \left((A+P) + \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}} \right)$$

$$\Delta T = 2\pi \frac{A+P}{2L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \left(1 + \frac{R_s}{(A+P) \left(1 - \frac{R_s}{D} \right)} \right)$$

$$\Delta T = 2\pi \frac{A+P}{2L} \sqrt{\frac{AP}{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{R_s}{(A+P) \left(1 - \frac{R_s}{D} \right)} \right)$$

Voor Mercurius:

$$A = 6.98 * 10^{10}, P = 4.60 * 10^{10}, D = 2.77 * 10^{10}, R_{s(sun)} = 2953.25, L = 2.71 * 10^{15},$$

De tijd voor één omwenteling is:

$$\Delta T = 7598744 \text{ sec} \Rightarrow \frac{7598744}{24 * 3600} = \mathbf{87.95 \text{ dagen}}$$

Afgeleid in hoofdstuk [Schwarzschild-Benadering 4.8.2](#) vergelijking [2d](#) de instantane rotatiesnelheid van Mercurius als functie van $\varnothing$:

$$v = \left\{ \frac{GM_{sun}}{a(1-e^2)} (1 + 2e \cos[\varnothing(1-\epsilon)] + e^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (42a)$$

4.4.7 Fysische betekenis

- **Waarom precessie?**

Door de kromming van ruimte-tijd rond de zon is de baan van Mercurius geen perfecte ellips, maar een ellips die langzaam roteert.

- **Geen Newtonse verklaring:**

Dit effect kan niet worden verklaard door klassieke mechanica of de invloed van andere planeten alleen.

- **Empirische bevestiging:**

De gemeten waarde van 43 boogseconden per eeuw was een van de eerste grote successen van de algemene relativiteit.

4.4.8 Kerninzicht

- De precessie van Mercurius' perihelium is een direct, meetbaar gevolg van de kromming van ruimte-tijd zoals voorspeld door de algemene relativiteit en de Schwarzschild-metrik.
- De kwantitatieve overeenstemming tussen theorie en waarneming is een van de krachtigste bevestigingen van Einsteins theorie.

4.5 Experiment 5 – Shapiro-Tijdvertraging

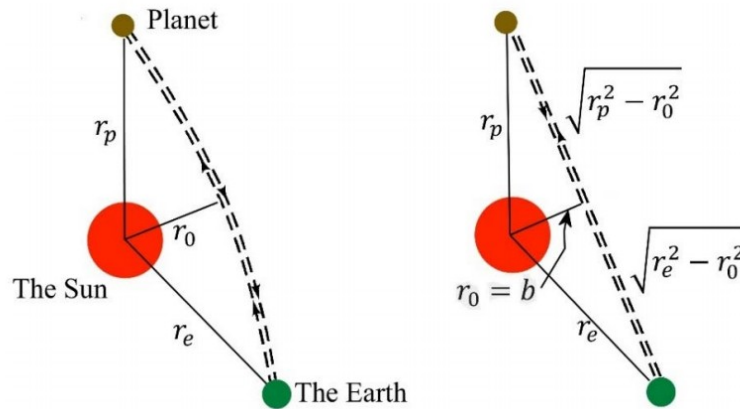
Inleiding en Fysisch Idee

De **Shapiro-tijdvertraging** is het effect waarbij een lichtsignaal (of radargolf) dat langs een massief object (zoals de zon) reist, langer onderweg is dan verwacht op basis van een rechte lijn in vlakke ruimte-tijd. Dit is een direct gevolg van de kromming van de ruimte-tijd door massa, zoals voorspeld door de algemene relativiteitstheorie.

Historie:

Het effect werd in 1964 voorspeld door Irwin Shapiro en sindsdien in vele experimenten bevestigd, onder andere door radarsignalen naar Venus en Mercury te sturen en de retourtijd te meten.

In het Shapiro-experiment werden radarsignalen vanaf de aarde naar een planeet gestuurd, die op dat moment aan de andere kant van de zon stond. Deze signalen weerkaatsten terug naar de aarde. Volgens de algemene relativiteitstheorie zal het signaal, dat net langs de zon scheert, worden afgebogen door de zwaartekracht van de zon, of eigenlijk de massa van de zon heeft de ruimte-tijd vervormd zodanig dat het signaal een “rechte gekromde” lijn volgt (zie fig. 4).



Figuur 1: De radarreflectie van fotonen van de aarde naar een planeet en terug. Het linker beeld toont het daadwerkelijke pad, overdreven weergegeven. Het rechter beeld toont de Euclidische vorm.

(Uit *Tests of General Relativity: A Review* door Estelle Asmodelle (Asmodelle, 2017))

Om de Shapiro-vertraging te definiëren, nemen we aan dat de aarde en de planeet stilstaan, terwijl de totale tijd voor de retoureis van het radarsignaal Δt is, in coördinaattijd. De waarde van t moet worden weergegeven in termen van r over het gehele pad, waarbij r_0 de kortste afstand tot de zon is.

4.5.1 Afleiding op basis van de Schwarzschild-metrick

Voor de berekening van de Shapiro-vertraging wordt de Schwarzschild-vergelijking toegepast.

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Waarbij:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM_{sun}}{c^2 r}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

en

$$R_s = \frac{2GM_{sun}}{c^2}$$

De Schwarzschild-radius van de Zon.

We kiezen het referentiekader zodanig dat het overeenkomt met het equatoriale vlak ($\theta = \pi/2$).

Dan geldt:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\phi^2$$

Voor fotonen of radar echo's geldt dat $d\tau = 0$. In dat geval geldt dan:

$$\sigma^2 c^2 dt^2 = \frac{dr^2}{\sigma^2} + r^2 d\phi^2$$

Afleiding naar de affiene parameter λ :

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2$$

Zoals afgeleid in formule [11](#) uit hoofdstuk [4.2](#) is het impulsmoment:

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$
$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}$$

Vermenigvuldigen met σ^2 :

$$\sigma^4 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \sigma^2$$

Stel:

$$k^2 = \sigma^4 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2$$

Opgemerkt: Dit is ook $k = \frac{E}{c^2}$ zoals te zien is in formule [9a](#) in hoofdstuk [4.2](#).

Dan is:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \sigma^2 = k^2 c^2$$

De energievergelijking voor een fotonenbaan in de Schwarzschild-geometrie is:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) = k^2 c^2 \quad (42b)$$

Zoals eerder is afgeleid:

$$k^2 = \sigma^4 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{k^2}{\sigma^4}$$

Waarbij we gebruiken:

$$\left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{k^2}{\sigma^4} = \frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^2}$$

Nu is:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (42c)$$

We kunnen de energievergelijking (42b) herschrijven:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = k^2 c^2$$

Vervang $\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2$ door (42c):

$$\frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = k^2 c^2$$

Deel door $\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)$:

$$\frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^3} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{k^2 c^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)} = 0$$

Vervolgens delen we door k^2 :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^3} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{k^2 r^2} - \frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}} = 0 \quad (43)$$

Beschouw nu het pad van een foton van de Aarde naar een andere planeet (bijvoorbeeld Venus, met $r_p = r_V$), zoals weergegeven in Figuur 2. Het is duidelijk dat het pad van het foton zal worden afgebogen door het zwaartekrachtsveld van de Zon. Laat r_0 de coördinatenafstand zijn van het dichtste punt waar het foton de Zon nadert; dan geldt:

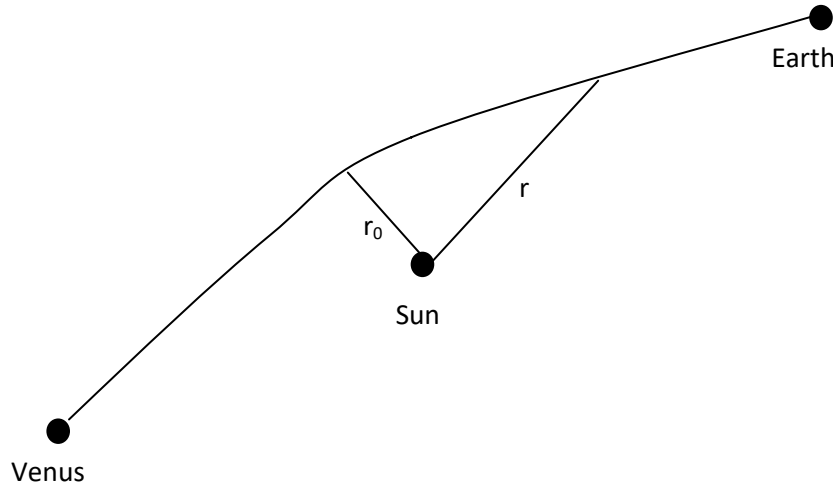
$$\left(\frac{dr}{dt} \right)_{r_0} = 0$$

Dan vinden we uit (43) de relatie tussen de constanten:

$$\frac{L^2}{k^2 r_0^2} = \frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r_0}}$$

Na herschikking kunnen we (43) schrijven als:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3 \left(-\frac{L^2}{k^2 r^2} + \frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}}\right) = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3 \left(\frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{L^2 r_0^2}{k^2 r_0^2 r^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3 \left(\frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{r_0^2 c^2}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right) \\ &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2 \left(c^2 - \frac{r_0^2 c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right) = c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right) \\ &\Rightarrow \frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



Figuur 2 Fotonpad van de Aarde naar Venus, afgebogen door de Zon.

Dit kan worden geïntegreerd om de tijd te bepalen die nodig is om te reizen tussen punt r_0 en r :

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{1}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

4.5.1.1 Eerste-orde benadering

Omdat $R_s \ll r_0$, kunnen we de eerste orde Taylor-benadering nemen van:

$$\frac{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{\left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)} \approx \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(1 + \frac{R_s}{r_0}\right) = 1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_s}{r_0} - \frac{R_s^2}{rr_0}$$

Dus kan de integrand worden uitgebreid tot de eerste orde in R_s/r :

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{1}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_s}{r_0} - \frac{R_s^2}{rr_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Vermenigvuldig de teller en de noemer met r :

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[r^2 - r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_s}{r_0} - \frac{R_s^2}{rr_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[r^2 - r_0^2 - R_s r_0 + \frac{R_s r_0^2}{r} + \frac{R_s^2 r_0}{r}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \sqrt{r^2 - r_0^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \sqrt{r^2 - r_0^2} \left[\left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Eerst werken we de rechterkant van de noemer uit:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right) = \\ & = 1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2} - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2} + \frac{2R_s^2 r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r(r^2 - r_0^2)} - \frac{R_s^3 r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2(r^2 - r_0^2)} \end{aligned}$$

Na het negeren van de kleinste termen:

$$\left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right) = 1 - \frac{2R_s}{r} - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}$$

$$\left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right) = 1 - \frac{2R_s}{r} - \frac{R_s r_0 (r - r_0)}{r(r + r_0)(r - r_0)}$$

$$\left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 - r_0^2}\right) = 1 - \frac{2R_s}{r} - \frac{R_s r_0}{r(r + r_0)}$$

Vul de noemer in:

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c\sqrt{r^2 - r_0^2} \left[1 - \frac{2R_s}{r} - \frac{R_s r_0}{r(r + r_0)}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Bij wederom een Taylor-benadering van de eerste orde verkrijgen we:

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left[1 + \frac{R_s}{r} + \frac{R_s r_0}{2r(r + r_0)}\right] dr$$

Dit kan worden herleid tot (zie controle hieronder):

$$t(r, r_0) = \frac{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} + \frac{R_s}{c} \ln \left[\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0} \right] + \frac{R_s}{2c} \left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

We kunnen de bovenstaande formule controleren door de afgeleide te nemen; die moet gelijk zijn aan de integrand:

$$\frac{dt(r, r_0)}{dr} = \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{\left(\frac{1}{r_0} + \frac{r}{r_0(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0}} + \frac{R_s}{4c} \frac{\left(\frac{1}{r + r_0} - \frac{(r - r_0)}{(r + r_0)^2}\right)}{\left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dt(r, r_0)}{dr} = \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{\left(1 + \frac{r}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{4c} \frac{\left(\frac{r + r_0 - r + r_0}{(r + r_0)^2}\right)}{\left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dt(r, r_0)}{dr} = \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{\left(r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}\right)(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{4c} \frac{(r + r_0 - r + r_0)}{\left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{1}{2}}(r + r_0)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{1}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{2c} \frac{r_0}{\frac{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r + r_0} (r + r_0)^2} \\ \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{1}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{2c} \frac{r_0}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}} (r + r_0)} \\ \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{R_s}{r} + \frac{R_s r_0}{2r(r + r_0)} \right]\end{aligned}$$

Dus de formule is correct!

Dus:

$$t(r, r_0) = \frac{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} + \frac{R_s}{c} \ln \left[\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0} \right] + \frac{R_s}{2c} \left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

De eerste term aan de rechterkant is precies wat we zouden verwachten als het licht in een rechte lijn zou reizen. De tweede en derde termen geven de extra coördinatietijd die nodig is voor het foton om langs het *gekromde pad* naar het punt r te reizen. Zoals te zien in Figuur 2, als we een radarstraal naar Venus sturen en terug, dan is de extra coördinatietijd ten opzichte van een rechte lijn:

$$\Delta t = 2 \left[t(r_E, r_0) + t(r_V, r_0) - \frac{(r_E^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} - \frac{(r_V^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} \right]$$

Zoals eerder vermeld, vormen de eerste twee termen binnen deze haakjes de relativistische tijd van de Aarde naar Venus, en de twee termen aan de rechterkant vormen de tijd als het pad gewoon een rechte lijn zou zijn. De factor 2 is inbegrepen omdat het foton naar Venus moet gaan en terug naar de Aarde.

Aangezien $r_E \gg r_0$ en $r_V \gg r_0$ hebben we:

$$\begin{aligned}t(r_E, r_0) - \frac{(r_E^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} &\approx \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{r_E + r_E}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c} = \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_E}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c} \\ t(r_V, r_0) - \frac{(r_V^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} &\approx \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{r_V + r_V}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c} = \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_V}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c}\end{aligned}$$

Sommatie:

$$\frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_E}{r_0} \right) + \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_V}{r_0} \right) + \frac{R_s}{c} = \frac{2GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4r_E r_V}{r_0^2} \right) + 1 \right]$$

Dus om naar Venus en terug te gaan, is de extra coördinaattijdvertraging:

$$\boxed{\Delta t \approx \frac{4GM_{sun}}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4r_E r_V}{r_0^2} \right) + 1 \right]}$$

Hieruit blijkt ook dat de tijdvertraging groter wordt naarmate de impactparameter r_0 (de afstand tot het zwaartekrachtscentrum) kleiner wordt.

Numerieke Waarden

- Voor Venus, wanneer het tegenover de Aarde staat aan de andere kant van de Zon:

$$\Delta t \approx 252 \mu s.$$

- Terwijl voor Mercurius geldt:

$$\Delta t \approx 240 \mu s.$$

- Afstand Venus-Zon (r_V): $108 * 10^9 \text{ m}$
- Afstand Zon-Aarde (r_E): $150 * 10^9 \text{ m}$
- Totale afstand Venus-Aarde: $258 * 10^9 \text{ m}$

De totale reistijd (Aarde, Zon, Venus en terug) zonder vertraging is 1720 seconden. De Shapiro-vertraging is dus klein, maar meetbaar effect.

4.5.1.2 Eigentijd van Aarde versus coördinaattijd

Natuurlijk meten klokken op Aarde geen coördinaattijd, vanwege de rotatie van de Aarde om haar eigen as en het effect van de rotatie van de Aarde rond de Zon.

Door de rotatie van de Aarde om haar eigen as wordt de overeenkomstige eigen tijd van het signaal gegeven door:

$$\Delta \tau = \left(1 - \frac{2GM_E}{c^2 r_E}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t$$

Het effect is dus:

$$\Delta t - \Delta \tau = \Delta t - \left(1 - \frac{2GM_E}{c^2 r_E}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t$$

Dit geeft:

$$\Rightarrow 6.98 * 10^{-10} \Delta t \text{ voor } 252 \mu s \Rightarrow 1.76 * 10^{-13} \text{ seconden} = 0.176 ps$$

$$p = 10^{-12}$$

Aangezien $r_E \gg \frac{GM}{c^2}$, en dus $0.176 ps \ll 252 \mu s$ kunnen we dit effect negeren voor de nauwkeurigheid van onze berekening.

Het effect van de rotatie van de Aarde rond de Zon veroorzaakt een vertraging van 15 nanoseconden per seconde, zoals vermeld in hoofdstuk (4.6).

Voor de extra tijdvertraging $\Delta t \approx 252 \mu s$ vanaf Venus, veroorzaakt de rotatie van de Aarde rond de Zon een klein effect van: $252 * 10^{-6} * 15 * 10^{-9} = 3.78 * 10^{-12} \text{ seconden} = 3.78 \text{ ps}$, wat ook genegeerd kan worden.

4.5.2 Fysische Interpretatie

- De extra tijdsvertraging is een direct gevolg van de kromming van ruimte-tijd door de zon.
- Het effect is het grootst als het signaal dicht langs de zon gaat (kleine r_0).
- Experimenten tonen aan dat de gemeten tijdsvertraging exact overeenkomt met de voorspellingen van de algemene relativiteitstheorie.

4.5.3 Praktisch belang

- De Shapiro-tijdsvertraging is belangrijk voor nauwkeurige navigatie van ruimtemissies en het testen van alternatieve zwaartekrachtstheorieën.
- Het effect wordt ook gebruikt in pulsar-timing en bij het interpreteren van signalen van ruimtevaartuigen.

4.5.4 Kerninzicht

De Shapiro-tijdsvertraging is een van de vier klassieke experimenten die de algemene relativiteitstheorie bevestigen. Het effect is klein, maar meetbaar en volledig verklaarbaar met de Schwarzschild-metrick.

4.6 Tijdsrelatie tussen Waarnemer op Aarde en het Centrum van de Zon

Wanneer we de afbuiging van licht of de banen van planeten rond de Zon beschouwen, dan wordt een referentiekader gebruikt met het centrum in het midden van de Zon, terwijl wij het fenomeen vanaf de Aarde observeren en een **rotatiesnelheid hebben ten opzichte van de Zon**. In dit hoofdstuk onderzoeken we de tijdsrelatie tussen een waarnemer op de Aarde en het centrum van de Zon, met de bijbehorende correctiefactoren.

Het vertrekpunt is de Schwarzschild-metrick, die de ruimte-tijd rondom een sferisch symmetrisch massief object beschrijft. De metrick wordt gegeven door:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

waarbij:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM_{sun}}{c^2 r}}, \quad R_s = \frac{2GM_{sun}}{c^2}$$

- G is de gravitatieconstante,
- M_{sun} is de massa van de Zon,
- c is de lichtsnelheid,
- R is de afstand tot het centrum van de Zon.

De coördinaten θ en ϕ representeren de gebruikelijke bolvormige coördinaten, waarbij de waarnemingen zich in het evenaarsvlak van de Zon bevinden, zodat $\theta = \pi/2$ en de straal r constant is.

4.6.1 Vergemakkelijking van de Schwarzschild-metrick

In het geval van een waarnemer op de Aarde wordt aangenomen dat de Aarde zich in een cirkelvormige baan rondom de Zon bevindt. De tijdsmeting van de waarnemer op Aarde wordt geassocieerd met de eigen tijd $d\tau$, die de tijd is die door de waarnemer zelf wordt gemeten, en de coördinaattijd dt , die overeenkomt met de tijd in het universele referentiekader van de Zon.

De Schwarzschild-metrick wordt vereenvoudigd tot:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2$$

waarbij τ de eigen tijd is van de waarnemer op Aarde en t de coördinaattijd in het referentiekader van de Zon. Dit kan herschreven worden als:

$$d\tau^2 = \sigma^2 dt^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dt^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right) dt^2$$

4.6.2 Tijdsvertraging door de Zwaartekracht en Beweging van de Aarde

Voor een waarnemer op de Aarde wordt de tijdsrelatie als volgt gegeven:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{v^2}{c^2} \right) dt^2$$

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{v^2}{c^2} \right)} dt$$

waarbij R_s de Schwarzschildstraal van de Zon is, v de snelheid van de Aarde in haar baan, en r de afstand van de Aarde tot het centrum van de Zon. Dit is de algemene tijdsrelatie die rekening houdt met zowel de zwaartekracht van de Zon als de snelheid van de Aarde.

De specifieke waarden zijn als volgt:

- $R_s = 2950$ m,
- $v = 30.000$ m/s,
- $r = 150 \times 10^9$ m (de gemiddelde afstand van de Aarde tot de Zon).

Door de waarden in te vullen en de uitdrukking voor $d\tau$ uit te breiden met een Taylorreeks tot de eerste orde, krijgen we de volgende benadering:

$$d\tau = \left(1 - \frac{R_s}{2r} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt$$

De tweede term aan de rechterkant is het gevolg van de zwaartekracht van de Zon en de derde term is het gevolg van de snelheid van de Aarde rond de Zon.

Substitutie van de numerieke waarden levert:

$$d\tau = (1 - 99.10^{-10} - 50.10^{-10}) dt$$

$$d\tau \approx (1 - 15.10^{-9}) dt$$

$$\Delta t - \Delta\tau = 15.10^{-9} \Delta t$$

Dit betekent dat de eigen tijd van de waarnemer op Aarde (tijdens de baan rondom de Zon) wordt vertraagd in vergelijking met de universele tijd, met een vertraging van ongeveer 15.10^{-9} van de looptijd dt . Dus over één seconde is het verschil 15 nanoseconden.

Dit is de relatie tussen de tijd van de waarnemer op Aarde en de universele Zon-referentiekadertijd t .

4.6.3 Correctiefactor voor de Zwaartekracht van de Aarde

De waarnemer op de Aarde wordt ook beïnvloed door de zwaartekracht van de Aarde. Deze zwaartekracht moet eveneens in aanmerking worden genomen voor een volledige beschrijving van de tijdsrelatie. De eigen tijd $d\tau$ wordt in dit geval aangepast door de zwaartekracht van de Aarde, waarbij we de volgende metriek gebruiken voor de Aarde:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM_E}{c^2 r_e}} dt$$

waarbij M_E de massa van de Aarde is, r de straal van de Aarde, en de waarden van de constante G en c bekend zijn. De massa van de Aarde is $M_E = 5.9742 \times 10^{24}$ kg, en de straal van de Aarde is $r_e = 6.381 \times 10^6$ m.

Dit geeft:

$$d\tau = \sqrt{1 - 1.3908 \cdot 10^{-9}} dt = (1 - 0.6954 \cdot 10^{-9}) dt$$

Voor een waarnemer op de evenaar is de rotatiesnelheid v_{rot} van de Aarde ook van belang. De hoeksnelheid $\frac{d\phi}{dt}$ van de Aarde wordt gegeven door de rotatieperiode van de Aarde (siderische periode: 86162.4 seconden):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{T_{tot}} = 7.2923 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

De aangepaste tijdsrelatie voor een waarnemer op de evenaar, inclusief de rotatie van de Aarde, wordt dan:

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{R_E}{r_e} - \frac{v_E^2}{c^2}\right)} dt$$

waarbij de tweede term de bijdrage van de rotatiesnelheid van de Aarde betreft. Door de juiste waarden in te vullen, krijgen we de uiteindelijke tijdsrelatie:

$$d\tau = \sqrt{1 - 1.3908 \cdot 10^{-9} - 2.4059 \cdot 10^{-12}} dt = (1 - 0.6966 \cdot 10^{-9}) dt.$$

Waarbij:

- $R_E = 0.008875$ m (Schwarzschild-radius Aarde)
- $r_e = 6,381,000$ m (straal van de Aarde)
- $v_E = 465$ m/s (rotatie Aarde om eigen as)
- $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

4.6.4 Conclusie

De tijdsrelatie tussen de waarnemer op de Aarde en het centrum van de Zon is een combinatie van effecten die voortkomen uit de zwaartekracht van de Zon, de snelheid van de Aarde in haar baan, en de zwaartekracht van de Aarde zelf. Deze factoren resulteren in een tijdsvertraging die in eerste instantie lijkt te komen door de interactie van de Aarde met het zwaartekrachtsveld van de Zon, maar ook wordt beïnvloed door de beweging van de Aarde en de lokale zwaartekracht van de Aarde.

4.6.5 Fysische betekenis

- Klokken op Aarde lopen langzamer dan een hypothetische klok in het Zon-centrum, door zowel zwaartekracht als beweging.
- Voor GPS en ruimtevaart zijn deze correcties essentieel voor nauwkeurige tijdsbepaling.

4.7 Alternatieve Afleiding van de Baanvergelijking

Volgens de eerste wet van Kepler zijn alle planeetbanen om de zon ellipsvormig. Zoals we in [hoofdstuk 4.4](#) hebben gezien heeft de Algemene Relativiteitstheorie aangetoond dat er ook een relativistische correctie is op de ellipsvorm die de periheliumprecessie van bijvoorbeeld Mercurius verklaart.

We geven daarom hier een alternatieve afleiding van de baanvergelijking voor een massief deeltje in de Schwarzschild-geometrie die een oplossing geeft die ons dichterbij de oorspronkelijke formule van een ellips brengt.

Deze is:

$$r(\varnothing) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos[\varnothing - \theta]}$$

Deze vergelijking wordt vergeleken met de relativistische uitkomst (zie [vergelijking 3 5 5a](#)) aan het einde van dit hoofdstuk:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos[\varnothing - \epsilon \varnothing]}$$

Hier zien we dat θ niet een constante is maar een functie van $\varnothing$ en verandert met een factor ϵ .

Uit “*General Relativity an introduction for Physics*” door M.P. Hobson, G. Efstathiou en A.N. Lasenby Pag. 230 (M.P Hobson, 2006).

We beperken ons tot het equatorvlak $\theta = \pi/2$, zodat de Schwarzschild-metrick voor een massief deeltje reduceert tot:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varnothing^2$$

De metrickvergelijking wordt dan:

$$c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varnothing}{d\tau}\right)^2 = c^2$$

Na vermenigvuldiging met $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$ volgt:

$$c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varnothing}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

Herschikking:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varnothing}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = c^2 \left(\frac{2GM}{c^2 r} - 1\right)$$

We substitueren de behouden grootheden:

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{c^2}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = L$$

We krijgen dan:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{E^2}{c^2} = c^2 \left(\frac{2GM}{c^2 r} - 1\right) = \frac{2GM}{r} - c^2$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{r} + \frac{2GML^2}{c^2 r^3}$$

Nu:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$$

Dit ingevuld in de vorige vergelijking:

$$\left(\frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{r} + \frac{2GML^2}{c^2 r^3}$$

Delen door L^2 :

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{rL^2} + \frac{2GM}{c^2 r^3}$$

Vervang nu door $u = 1/r$

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = - \frac{du}{d\phi}$$

Nu wordt de vergelijking:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GMu}{L^2} + \frac{2GMu^3}{c^2}$$

We differentiëren deze vergelijking ten opzichte van ϕ om vervolgens te verkrijgen:

$$2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2 u}{d\phi^2} + 2u \frac{du}{d\phi} = \frac{2GM}{L^2} \frac{du}{d\phi} + \frac{6GMu^2}{c^2} \frac{du}{d\phi}$$

We delen door $2 \frac{du}{d\phi}$ (ervan uitgaande dat $\frac{du}{d\phi} \neq 0$):

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} \quad (44)$$

Als we de laatste term voorlopig negeren, krijgen we de vergelijking volgens de Newtoniaanse theorie, waarvan de oplossing is:

$$u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) \quad \text{of} \quad r = \frac{L^2}{GM(1 + e \cos \phi)} \quad (45)$$

Dit beschrijft een ellips, waarbij de parameter e de *excentriciteit* van de baan voorstelt. Zo kunnen we bijvoorbeeld de baan van een planeet om de zon tekenen. We kunnen de afstand tot het dichtstbijzijnde punt (*perihelium*) schrijven als $r_1 = a(1 - e)$ en de afstand tot het verst verwijderde punt (*aphelium*) als $r_2 = a(1 + e)$.

Afgeleid van (45) en wederom gesubstitueerd met $r=1/u$ geeft:

$$r = \frac{L^2}{GM(1 + e \cos \phi)} \Rightarrow r_{\max} = \frac{L^2}{GM(1 - e)} \quad \text{en} \quad r_{\min} = \frac{L^2}{GM(1 + e)}$$

De halve lange as a wordt dan gegeven door:

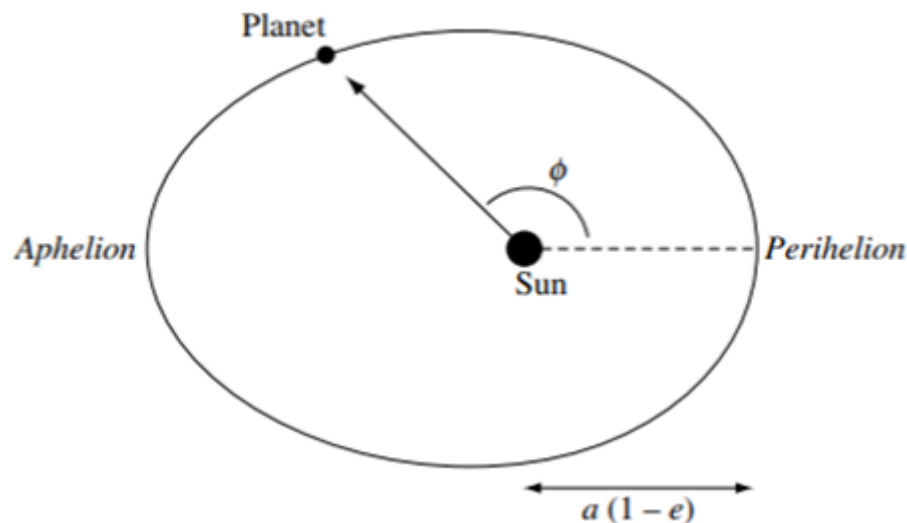
$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{L^2}{2GM} \left(\frac{1}{(1 - e)} + \frac{1}{(1 + e)} \right) = \frac{L^2}{2GM} \left(\frac{1 + e + 1 - e}{(1 - e)(1 + e)} \right)$$

Dus de bewegingsvergelijking vereist dan dat de halve lange as wordt gegeven door:

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)} \quad (46)$$

Dus:

$$r_{\max} = \frac{L^2}{GM(1 - e)} = a(1 + e) \quad \text{en} \quad r_{\min} = \frac{L^2}{GM(1 + e)} = a(1 - e)$$



De ellipsvormige baan van een planeet om de zon; e is de excentriciteit van de baan.

Nu, om de derde term (uit vergelijking 44) op te nemen, wordt de oplossing als volgt:

$$u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \varphi) + \Delta u \quad (47)$$

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{GM}{L^2} e \sin \varphi + \frac{d\Delta u}{d\varphi}$$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -\frac{GM}{L^2} e \cos \varphi + \frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2}$$

Dit substitueren we in formule (44):

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} \quad (44)$$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \varphi - e \cos \varphi) + \frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2} + \Delta u = \frac{GM}{L^2} + \frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2} + \Delta u$$

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2} + \Delta u = -\frac{GM}{L^2} + \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{GM}{L^2} + \frac{GM}{L^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} = \frac{3GMu^2}{c^2}$$

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2} + \Delta u = \frac{3GM}{c^2} \left(\left(\frac{GM}{L^2} \right)^2 + \left(\frac{GM}{L^2} e \cos \varphi \right)^2 + (\Delta u)^2 + 2 \left(\frac{GM}{L^2} \right)^2 e \cos \varphi + 2 \frac{GM}{L^2} \Delta u + 2 \frac{GM}{L^2} e \cos \varphi \cdot \Delta u \right)$$

We vinden dat, tot de eerste orde in Δu ,

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2} + \Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} (1 + (e \cos \varphi)^2 + 2e \cos \varphi)$$

Een bijzondere oplossing van de vergelijking is:

$$\Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\varphi \right) + e \varphi \sin \varphi \right] \quad (48)$$

Dit kan worden gecontroleerd door directe differentiatie van (48):

$$\frac{d\Delta u}{d\varphi} = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{1}{3} e^2 \sin 2\varphi + e \sin \varphi + e \varphi \cos \varphi \right]$$

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2} = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{2}{3} e^2 \cos 2\varphi + e \cos \varphi + e \cos \varphi - e \varphi \sin \varphi \right]$$

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2} = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{2}{3} e^2 \cos 2\varphi + 2e \cos \varphi - e \varphi \sin \varphi \right]$$

Invullen in (48):

$$\frac{d^2 \Delta u}{d\varphi^2} + \Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{2}{3} e^2 \cos 2\varphi + 2e \cos \varphi - e \varphi \sin \varphi + 1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\varphi \right) + e \varphi \sin \varphi \right]$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Delta u}{d\varnothing^2} + \Delta u &= \frac{3(GM)^3}{c^2L^4} \left[1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^2 \cos 2\varnothing + 2e \cos \varnothing \right] \\ \frac{d^2\Delta u}{d\varnothing^2} + \Delta u &= \frac{3(GM)^3}{c^2L^4} \left[1 + \frac{1}{2}e^2(1 + \cos 2\varnothing) + 2e \cos \varnothing \right] \\ \frac{d^2\Delta u}{d\varnothing^2} + \Delta u &= \frac{3(GM)^3}{c^2L^4} \left[1 + \frac{1}{2}e^2(\sin^2 \varnothing + \cos^2 \varnothing + \cos^2 \varnothing - \sin^2 \varnothing) + 2e \cos \varnothing \right] \\ \frac{d^2\Delta u}{d\varnothing^2} + \Delta u &= \frac{3(GM)^3}{c^2L^4} [1 + e^2 \cos^2 \varnothing + 2e \cos \varnothing]\end{aligned}$$

Dus, vergelijking (44) is correct.

Nu vullen we Δu in vergelijking (3) in:

$$\begin{aligned}u &= \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \varnothing) + \Delta u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \varnothing) + \frac{3(GM)^3}{c^2L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\varnothing \right) + e \varnothing \sin \varnothing \right] \\ u &= \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \varnothing) + \frac{3(GM)^3}{c^2L^4} e \varnothing \sin \varnothing + \frac{3(GM)^3}{c^2L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\varnothing \right) \right]\end{aligned}$$

Aangezien de constante $\frac{3(GM)^3}{c^2L^4}$ erg klein is, kunnen de laatste drie termen aan de rechterkant van de vergelijking verwaarloosd worden - ze zijn zo klein dat ze geen merkbare invloed hebben en daarom niet bruikbaar zijn om de theorie te testen.

Toch is de laatste term $e \frac{3(GM)^3}{c^2L^4} \varnothing \sin \varnothing$ een speciaal geval. Hoewel deze term aanvankelijk ook klein is, groeit hij langzaam naarmate $\varnothing$ groter wordt, omdat $\varnothing$ zelf steeds toeneemt in de tijd. Daardoor stapelt het effect zich op, en moeten we deze term wel behouden.

$$u = \frac{GM}{L^2} \left[1 + e \left(\cos \varnothing + \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} \varnothing \sin \varnothing \right) \right] + \frac{3(GM)^3}{c^2L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\varnothing \right) \right]$$

Dus, onze benaderde oplossing is:

$$u = \frac{GM}{L^2} \left[1 + e \left(\cos \varnothing + \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} \varnothing \sin \varnothing \right) \right]$$

Met behulp van de relatie:

$$\begin{aligned}\cos \left[\varnothing \left(1 - \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} \right) \right] &= \cos \left(\varnothing - \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} \varnothing \right) = \cos \varnothing \cos \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} \varnothing + \sin \varnothing \sin \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} \varnothing \\ &\approx \cos \varnothing + \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} \varnothing \sin \varnothing \quad \text{voor } \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} \ll 1,\end{aligned}$$

kunnen we nu schrijven:

$$u \approx \frac{GM}{L^2} \left\{ 1 + e \cos \left[\varnothing \left(1 - \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} \right) \right] \right\} = \frac{GM}{L^2} \{ 1 + e \cos [\varnothing(1 - \epsilon)] \}$$

Voor $r=1/u$ krijgen we:

$$r = \frac{L^2}{GM\{1 + e\cos[\phi(1 - \epsilon)]\}} \quad (5)$$

Hierbij is:

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2}$$

Uit deze uitdrukking blijkt dat de baan weliswaar periodiek is, maar met een periode van $2\pi/(1 - \epsilon)$. Dit betekent dat de waarden van r zich herhalen in een hoek die groter is dan 2π . Hierdoor sluit de baan niet perfect zoals bij een klassieke ellips: de ellips draait langzaam rond het brandpunt. Dit verschijnsel noemen we precessie (zie onderstaande figuur).

Na elke volledige omloop is de ellips iets verdraaid rond het focuspunt, en wel met een hoek van:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{1 - \epsilon} - 2\pi = \frac{2\pi\epsilon}{1 - \epsilon} \approx 2\pi\epsilon = \frac{6\pi(GM)^2}{c^2 L^2}$$

We vervangen L met behulp van vergelijking (2):

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)} \quad (2)$$

Door deze uitdrukking te substitueren in vergelijking (5):

$$r = \frac{L^2}{GM\{1 + e\cos[\phi(1 - \epsilon)]\}}$$

Krijgen we voor het baantraject:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos[\phi(1 - \epsilon)]} \quad (5a)$$

Met:

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \quad \text{of} \quad \epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 GMa(1 - e^2)} = \frac{3GM}{c^2 a(1 - e^2)}$$

Afgeleid uit de derde wet van Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M + m)} \approx \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}}$$

Voor de snelheid v :

$$v = \frac{L}{r \cos \alpha} = \frac{\sqrt{aGM(1 - e^2)}}{a(1 - e^2)} \frac{(1 + e\cos[\phi(1 - \epsilon)])}{\cos \alpha}$$

Dus:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e^2)}} \frac{(1 + e \cos[\phi(1-\epsilon)])}{\cos \alpha}$$

waarbij:

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} = \frac{3(GM)^2}{c^2 a GM (1-e^2)} = \frac{3GM}{c^2 a (1-e^2)}$$

Omdat:

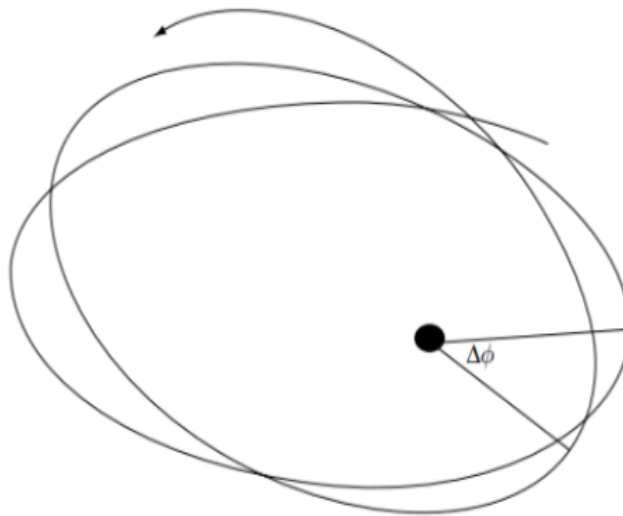
$$L^2 = aGM(1-e^2)$$

Ingevuld geeft:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi(GM)^2}{c^2 a GM (1-e^2)}$$

Uiteindelijk krijgen we voor de precessiehoek:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)c^2} \quad (6)$$



Precessie van een elliptische baan (sterk overdreven)

We passen vergelijking (6) toe op de baan van Mercurius, met de volgende parameters:

- periode = 88 dagen
- $a = 5.8 \times 10^{10}$ m

- $e=0.2$
- $M_s=2 \times 10^{30} \text{ kg}$

vinden we:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = 87.95 \text{ dagen}$$

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)c^2} = 5.02 \times 10^{-7} \text{ rad per omwenteling}$$

Om de precessie per eeuw te berekenen:

$$\Delta\phi = 5.02 \times 10^{-7} * \left(100 * \frac{365.25}{88}\right) * \left(\frac{360 * 60 * 60}{2\pi}\right)$$

$$\Delta\phi = 43'' \text{ (boogseconden per eeuw).}$$

In werkelijkheid is de gemeten precessie:

$$5599''.7 \pm 0.4'' \text{ per eeuw}$$

Het overgrote deel hiervan wordt veroorzaakt door gravitatie-invloeden van andere planeten. Maar na correctie voor deze verstoringen blijft er een restafwijking over die verrassend goed overeenkomt met de voorspelling van de algemene relativiteitstheorie. Voor andere hemellichamen vinden we vergelijkbare resultaten (in boogseconden per eeuw):

Object	Waargenomen restprecessie	Voorspelde restprecessie
Mercurius	43.1+/-0.5	43.03
Venus	8+/-5	8.6
Aarde	5+/-1	3.8
Icarus	10+/-1	10.3

De resultaten komen dus uitstekend overeen met de voorspellingen van de algemene relativiteitstheorie. Einstein voegde deze berekening voor Mercurius toe aan zijn artikel uit 1915 over de algemene relativiteitstheorie. Hiermee loste hij direct een van de grote openstaande problemen in de klassieke hemelmechanica op – een indrukwekkende eerste toets van zijn nieuwe, complexe theorie. Je kunt je voorstellen hoeveel vertrouwen dit hem gaf in de juistheid ervan.

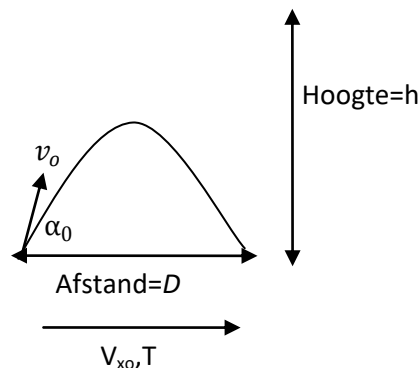
4.8 Experiment 6 - Berekening van een Kogelbaan

Als oefening zijn we geïnteresseerd in het berekenen van de baan van een kogel met behulp van de regels van de algemene relativiteitstheorie, in tegenstelling tot de klassieke (Newtoniaanse) benadering.

Voor de benadering volgens de Algemene Relativiteit veronderstellen we dat de baan van de kogel door de massa van de Aarde gedwongen wordt om een elliptische vorm te volgen. Voor de berekening maken we gebruik van de Schwarzschild-vergelijking. Maar eerst beginnen we met de Newtoniaanse benadering.

4.8.1 Newtoniaanse Benadering

We beschouwen een kogel die onder een hoek wordt afgevuurd, met een horizontale afstand D tussen het startpunt en het doelwit, en een maximale hoogte h . De zwaartekrachtsversnelling is g , en de initiële snelheid van de kogel heeft componenten v_{x0} (horizontaal) en v_{y0} (verticaal).



a) Tijd en snelheidscomponenten

De tijd die de kogel nodig heeft om de afstand D af te leggen met de constante horizontale snelheid v_{x0} is:

$$v_{x0} = \frac{D}{T} \Rightarrow T = \frac{D}{v_{x0}}$$

Om de afstand D af te leggen, heeft de kogel ook een opwaartse snelheid nodig, anders raakt hij te vroeg de grond. Dit vereist een initiële snelheidscomponent in de y -richting v_{y0} . Deze snelheid wordt bepaald door de horizontale afstand D en de tijd T . Dus, T is ook de tijd die het kost om vanaf de grond omhoog te gaan en weer terug naar de grond te vallen.

Omdat de beweging symmetrisch is, is de tijd om het hoogste punt te bereiken:

$$T_{omhoog} = \frac{T}{2}$$

Op dit punt is de verticale snelheid nul. Uit de bewegingsvergelijking volgt dan:

$$v_y = v_{y0} - gt = 0$$

bij:

$$t = \frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow v_{y0} = gt = g \frac{T}{2} = g \frac{D}{2v_{x0}}$$

b) Hoogte en relatie met tijd

De hoogte wordt bereikt op tijdstip $T/2$, dus:

$$h = v_{y0} \cdot \frac{T}{2} - \frac{1}{2} g \left(\frac{T}{2} \right)^2 = \frac{gD}{2v_{x0}} \cdot \frac{D}{2v_{x0}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{D}{2v_{x0}} \right)^2 = \frac{gD^2}{8v_{x0}^2}$$

Omgekeerd geeft dit:

$$v_{x0} = D \sqrt{\frac{g}{8h}}$$

Wanneer de kogel van het hoogste punt h terugvalt, duurt het $T/2$ om de grond te bereiken:

c) Totale snelheid en baanvergelijking

Om het hoogste punt te bereiken:

$$v_{y0} = g \frac{T}{2} = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}$$

De totale beginsnelheid:

$$v_0^2 = v_{x0}^2 + v_{y0}^2 = \frac{gD^2}{8h} + 2hg = g \left(\frac{D^2 + 16h^2}{8h} \right)$$

Is dus:

$$v_0 = \sqrt{g \left(\frac{D^2 + 16h^2}{8h} \right)}$$

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha_0$$

De hellingshoek α_0 waaronder de kogel wordt afgevuurd, volgt uit:

$$\tan \alpha_0 = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} = \frac{\sqrt{2hg}}{D \sqrt{\frac{g}{8h}}} = \frac{4h}{D}$$

Dus:

$$\tan \alpha_0 = \frac{4h}{D}$$

d) Baanvergelijking

De y-positie als functie van de tijd:

$$y(t) = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = g\frac{T}{2}t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt(T-t)$$
$$y(t) = \frac{1}{2}gt\left(\frac{D}{v_{x0}} - t\right)$$

In termen van de x-positie:

$$x = v_{x0}t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{x0}} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}g \cdot \frac{x}{v_{x0}} \left(\frac{D}{v_{x0}} - \frac{x}{v_{x0}}\right) = \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2} x(D-x)$$

De baan van de kogel is dus een parabool:

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2} x(D-x)$$

Dit is dus een functie van de vereiste afstand D wanneer de initiële horizontale snelheidscomponent v_{x0} is.

e) Voorbeeldberekening

Horizontale afstand D (m)	$(v_{x0} \text{ m/s})$	Tijd T (s)	Hoogte h (m)	Totale snelheid $(v_{x0} \text{ m/s})$
10	5	2	4.93	11.06
10	500	0.02	0.000493	500
100	5	20	493	99
100	50	2	4.93	51

(waarbij $g=9,87 \text{ m/s}^2$)

f) Volgende stap

Nu we de Newtoniaanse benadering volledig hebben uitgewerkt, kunnen we deze vergelijken met de berekening op basis van de Schwarzschild-geometrie binnen de algemene relativiteitstheorie. Deze vergelijking volgt in de volgende sectie.

4.8.2 Schwarzschild-Benadering

Voor deze benadering beschouwen we de kogelbaan als een deel van een ellips met het middelpunt van de aarde als een van de brandpunten. We gebruiken de resultaten uit de Schwarzschild-vergelijking in hoofdstuk [4.7 Alternatieve Afleiding van de Baanvergelijking](#) en [Krijgen we voor](#) het baantraject:

De semi-grote as is:

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)} \quad (2)$$

De parameter e staat voor de excentriciteit van de kogel baan. Het perihelium is $r_1 = a(1 - e)$ en het aphelium is $r_2 = a(1 + e)$.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

Dus voor een cirkel is $e=0$ en $r = r_1 = r_2 = a$.

Om een ellips te verkrijgen, zoals in de onderstaande tekening, waarbij het middelpunt van de aarde samenvalt met de linker focus van de ellips, ziet de vergelijking er als volgt uit:

$$r(\emptyset) = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]} \quad (2a)$$

Nu gaan we de hoek α afleiden tussen v , de snelheid tangentaal aan de ellips, en v_{per} , loodrecht op r , om het impulsmoment te bepalen. In dit experiment is v de totale snelheid van de kogel langs de ellips, terwijl v_{per} de component van de snelheid v is ten opzichte van het aardoppervlak en zoals vermeld loodrecht op $r(\emptyset)$.

$$\tan \alpha = \frac{dr}{rd\emptyset} = \frac{\{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\} \{a(1 - e^2)(1 - \epsilon)(e \sin[\emptyset(1 - \epsilon)])\}}{a(1 - e^2) \{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\}^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{dr}{rd\emptyset} = \frac{e(1 - \epsilon) \sin[\emptyset(1 - \epsilon)]}{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}$$

$$\alpha = \arctan \left\{ \frac{e(1 - \epsilon) \sin[\emptyset(1 - \epsilon)]}{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]} \right\}$$

Als:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

Dan krijgen we:

$$\cos \alpha = \left[1 + \left(\frac{e(1 - \epsilon) \sin[\emptyset(1 - \epsilon)]}{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cos \alpha = \left[\frac{1 - 2e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2 \cos^2[\emptyset(1 - \epsilon)] + \{e(1 - \epsilon) \sin[\emptyset(1 - \epsilon)]\}^2}{\{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\}^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Vanwege het negatieve wortelteken draaien we de vergelijking om:

$$\cos \alpha = \frac{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}{\left[1 - 2e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2 \cos^2[\emptyset(1 - \epsilon)] + (1 - 2\epsilon + \epsilon^2)e^2 \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)] \right]^{1/2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}{[1 - 2e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2 \cos^2[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2 \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)] - \epsilon(2 - \epsilon)e^2 \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]]^{1/2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}{[1 - 2e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2(1 - \epsilon(2 - \epsilon)\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)])]^{1/2}} \quad (2b)$$

Het momentum L is constant over de hele ellips. Het momentum is de snelheid loodrecht op r , vermenigvuldigd met r (ervan uitgaande dat de massa eenheid is):

$$L = v_{per} \cdot r = v \cdot \cos \alpha \cdot r$$

Dus hier geldt:

$$L = v_{x0} \cdot R_{earth}$$

Volgens vergelijking (2):

$$L = \sqrt{aGM(1 - e^2)}$$

De snelheid v wordt gegeven door:

$$v = \frac{L}{r \cos \alpha} = \frac{(aGM(1 - e^2))^{1/2}}{a(1 - e^2) \cos \alpha} (1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)])$$

Dit vereenvoudigt tot:

$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} \right)^{1/2} \frac{(1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)])}{\cos \alpha} \quad (2c)$$

Vul $\cos(\alpha)$ uit vergelijking (2b) in vergelijking (2c) in:

$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} \right)^{1/2} \frac{(1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)])}{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]} [1 - 2e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2(1 - \epsilon(2 - \epsilon)\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)])]^{1/2}$$

De ogenblikkelijke snelheid als functie van $\emptyset$ is:

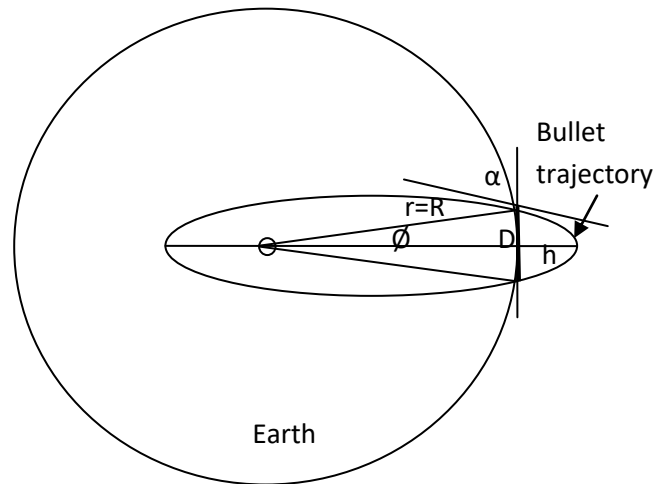
$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} (1 - 2e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2\{1 - \epsilon(2 - \epsilon)\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]\}) \right)^{1/2} \quad (2d)$$

Verkregen uit het vorige hoofdstuk [€](#):

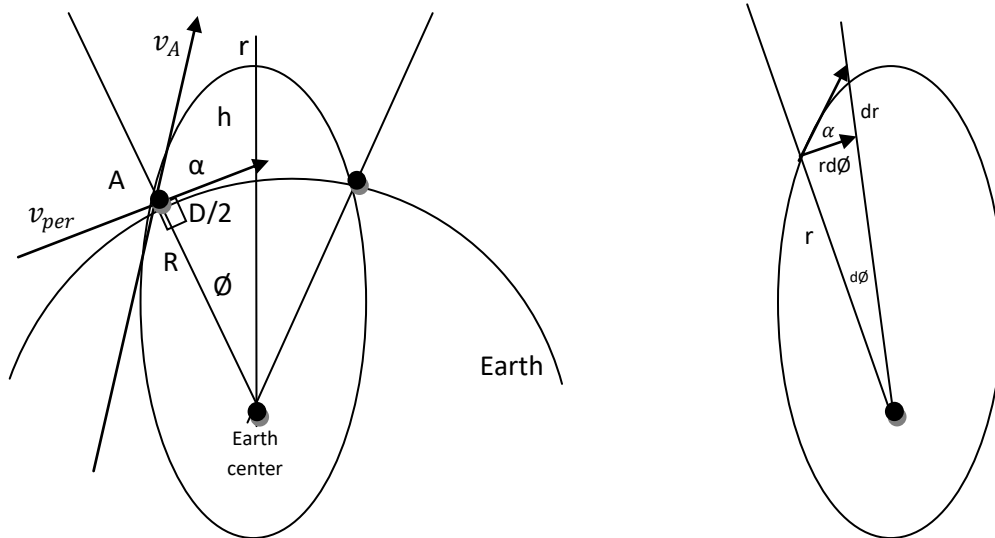
$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} = \frac{3(GM)^2}{c^2 aGM(1 - e^2)} = \frac{3GM}{c^2 a(1 - e^2)}$$

Hier is:

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} = \frac{3(GM)^2}{c^2 (v_{x0} R_{earth})^2} = \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R_{earth}} \right)^2 \text{ deze is dimensieloos} \quad (2e)$$



Om iets verder in te zoomen:



$$\phi R = \frac{D}{2} \Rightarrow \phi = \frac{D}{2R}$$

$$v_{per} = v_{xA} = v \cos(\alpha) \text{ en } v_{yA} = v \sin(\alpha)$$

Uit (2a)

$$a(1 - e^2) = r\{1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)]\}$$

Uit (2d)

$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} (1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v^2 = \frac{GM}{a(1 - e^2)} (1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\})$$

$$v^2 = GM \frac{(1 - 2e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]\})}{r \{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\}}$$

$$\frac{v^2 r}{GM} \{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\} = 1 - 2e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]\}$$

$$e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]\} - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)] \left(2 - \frac{v^2 r}{GM}\right) + \left(1 - \frac{v^2 r}{GM}\right) = 0$$

$$e = \frac{\cos[\emptyset(1 - \epsilon)] \left(2 - \frac{v^2 r}{GM}\right) \pm \sqrt{\left[\cos[\emptyset(1 - \epsilon)] \left(2 - \frac{v^2 r}{GM}\right)\right]^2 - 4 \left(1 - \frac{v^2 r}{GM}\right) \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]\}}}{2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]\}}$$

Voor het startpunt bij het snijpunt van de aarde en de baan geldt dat $r=R$. (R is hier de straal van de aarde) en $\emptyset = \frac{D}{2R}$.

Uit (2a):

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos[\emptyset(1 - \epsilon)]} \\ a(1 - e^2) &= R \left\{1 - e \cos\left[\frac{D}{2R}(1 - \epsilon)\right]\right\} \\ a &= \frac{R \left\{1 - e \cos\left[\frac{D}{2R}(1 - \epsilon)\right]\right\}}{(1 - e^2)} \end{aligned} \quad (3)$$

$$e = \frac{\cos\left[\frac{D}{2R}(1 - \epsilon)\right] \left(2 - \frac{v^2 R}{GM}\right) \pm \sqrt{\left[\cos\left[\frac{D}{2R}(1 - \epsilon)\right] \left(2 - \frac{v^2 R}{GM}\right)\right]^2 - 4 \left(1 - \frac{v^2 R}{GM}\right) \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]\}}}{2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]\}}$$

Of hier uit de vergelijkingen (2), (2e) en (3):

$$\begin{aligned} R \left\{1 - e \cos\left[\frac{D}{2R}(1 - \epsilon)\right]\right\} &= a(1 - e^2) = \frac{L^2}{GM} \\ e &= \frac{1 - \frac{L^2}{RGM}}{\cos\left[\frac{D}{2R}(1 - \epsilon)\right]} = \frac{1 - \frac{L^2}{RGM}}{\cos\left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R_{earth}}\right)^2\right)\right]} = \frac{1 - \frac{(v_{x0} R)^2}{RGM}}{\cos\left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2\right)\right]} \\ e &= \frac{1 - \frac{v_{x0}^2 R}{GM}}{\cos\left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2\right)\right]} \end{aligned}$$

De gegeven snelheid op het punt $r=R$ is v . Dus voor een gegeven snelheid zijn er twee oplossingen voor e .

Hier is h het hoogste punt van de kogelbaan:

$$h = a(1 + e) - R$$

Samen met (3):

$$h = \frac{R \left\{ 1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] \right\}}{(1 - e^2)} (1 + e) - R = R \left\{ \frac{1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right]}{1 - e} - 1 \right\}$$

$$h = R \left\{ \frac{1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] - 1 + e}{1 - e} \right\} = R \frac{e \left(1 - \cos \left[\frac{D}{2R} (1 - \epsilon) \right] \right)}{1 - e}$$

Hier is D de horizontale afstand van de kogel op aarde, v is de startsnelheid van de kogel en R is de aardstraal.

Zoals hierboven gezien, is $\emptyset = \frac{D}{2R}$.

Of pragmatisch gezien, in ons kogelvoorbeeld met v_{x0} en D als startpunten:

$$h = a(1 + e) - R = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e)} - R = \frac{L^2}{GM(1 - e)} - R = \frac{(v_{x0}R)^2}{GM(1 - e)} - R$$

$$h = \frac{(v_{x0}R)^2}{GM(1 - e)} - R$$

Waarbij:

$$e = \frac{1 - \frac{v_{x0}^2 R}{GM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^2 \right) \right]}$$

Afleiding van de omtrek van een ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x = a \cos \beta \text{ en } y = b \sin \beta$$

$$Omtrek = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\beta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta} \right)^2} d\beta$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 (1 - \cos^2 \beta) + b^2 \cos^2 \beta} d\beta$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \beta} d\beta$$

$$Omtrek = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} d\beta$$

Voor de **omtrek van een ellips** bestaat er geen eenvoudige gesloten oplossing. Er zijn benaderingen, zoals de Ramanujan-benadering:

$$Omtrek \approx \pi a \left[3 \left(1 + \sqrt{1 - e^2} \right) - \sqrt{10\sqrt{1 - e^2} + 3(2 - e^2)} \right]$$

Samenvatting van de gebruikte formules:

De vertrekpunten voor deze afleiding zijn de snelheid van de kogel langs het aardoppervlak ($v_{x0} = v_{per}$ loodrecht op r) en de vereiste afstand D . Dus, op het startpunt waar de kogel is gelanceerd, kennen we de positie en de impuls van de kogel en zouden we in staat moeten zijn om de baan te berekenen.

- $L = v_{x0} \cdot R_{earth}$ dus ϵ is L function of $L(v_{x0})$
- $\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2}$ dus $\epsilon(v_{x0})$
- $\emptyset = \frac{D}{2R}$ dus $\emptyset(D)$
- $e = \frac{1 - \frac{L^2}{RGM}}{\cos[\emptyset(1-\epsilon)]}$ dus $e(v_{x0}, D)$
- $\alpha = \arctan \left\{ \frac{e(1-\epsilon)\sin[\emptyset(1-\epsilon)]}{1 - e\cos[\emptyset(1-\epsilon)]} \right\}$ dus $e(v_{x0}, D)$
- $a = \frac{L^2}{GM(1-e^2)}$ dus $a(v_{x0}, D)$
- $h = a(1 + e) - R$ dus $h(v_{x0}, D)$

Met deze formules krijgen we de resultaten zoals weergegeven in de onderstaande Excel-tabel:

Gedetailleerde resultaten van berekeningen voor het bovengenoemde voorbeeld. De startpunten zijn de (loodrecht op r) snelheid van de kogel en de af te leggen afstand.

	Newton				Schwarschild			
Vper0(m/s)	5	500	500	1000	5	500	500	1000
Afstand(m)	10	10	2000	2000	10	10	2000	2000
Vr0(m/s)	9.87	0.10	19.73	9.87	9.76	0.10	19.66	9.71
snelheid(m/s)	11	500	500	1000	11	500	500	1000
epsilon					5.25E-03	5E-07	5.25E-07	1E-07
e(xcentriciteit)					1.000	0.996	0.996	0.984
a(m)					3.18E+06	3.18E+06	3.18E+06	3.20E+06
h(m)	4.93	4.93E-04	19.73	4.93	4.88	4.91E-04	19.66	4.85
alpha(rad)	1.10	0.000	0.04	0.010	1.10	0.000	0.04	0.010
alpha(deg)	63.13	0.0113	2.26	0.565	62.88	0.0113	2.25	0.556
Phi(rad)					7.87E-07	7.87E-07	1.57E-04	1.57E-04
L (ang. mom.)	3.18E+07	3.18E+09	3.18E+09	6.36E+09	3.18E+07	3.18E+09	3.18E+09	6.36E+09
cos(alpha)	0.4520	1.0000	0.9992	1.0000	0.4558	1.0000	0.9992	1.0000
cos(alpha+phi)					0.4558	1.000	0.9992	1.000
Circ.(km)					12662	12894	12894	13346

3) Analyse van de resultaten

Hoogteverschillen

In het klassieke geval is de maximale hoogte van het projectiel $h \approx 4.93$ m bij lage snelheden. In de Schwarzschild-benadering is deze licht lager (bijvoorbeeld 4.88 m), wat wijst op een sterkere effectieve zwaartekracht.

Excentriciteit

Een excentriciteit van exact 1 impliceert de klassieke parabool. De Schwarzschild-benadering toont dat de banen licht elliptisch zijn met $e < 1$. Voor een horizontale snelheid van 500 m/s blijkt $e \approx 0.996$, terwijl bij 5 m/s $e \approx 1$, wat overeenkomt met een bijna-parabolische baan.

Richtingshoek

De afwijking in richtingshoek $\emptyset$ is zeer klein bij lage snelheden, maar meetbaar bij hogere energieën. Voor een projectiel van 500 m/s over 2 km bedraagt de afwijking $\emptyset \approx 1.57 \cdot 10^{-4}$ rad, wat overeenkomt met een precessie van de ellips-as.

Impulsmoment en cirkelomtrek

Het impulsmoment L neemt toe met de beginsnelheid. De bijbehorende omtrek van de elliptische baan (benaderd) toont eveneens een toename, wat de langere afgelegde weg van een krachtig projectiel weerspiegelt.

4.8.3 Conclusie

- **Newtoniaanse ballistiek** is een uitstekende benadering voor dagelijkse situaties.
 - **Relativistische correcties** zijn subtiel, maar onmisbaar voor zeer nauwkeurige toepassingen en bij hoge snelheden.
 - **De Schwarzschild-benadering** toont dat zelfs een simpele kogelbaan in principe beïnvloed wordt door de kromming van ruimte-tijd.
-

Deel V – Coördinaten en Formele Analyse

5 Coördinatensystemen

5.1 Rechthoekig (Cartesiaans) Coördinatensysteem

Om onderscheid te maken tussen punten in de ruimte wordt een coördinatensysteem gecreëerd. De belangrijkste kenmerken van een coördinatensysteem zijn het **oorsprongspunt** en de **coördinaatassen**. Het oorsprongspunt kan gekozen worden op basis van wat het meest praktisch is, en voor de assen wordt meestal een **Cartesiaans systeem** gekozen omdat dit door zijn eenvoud wiskundig goed hanteerbaar is.

In een Cartesiaans coördinatensysteem:

- Staan de assen loodrecht (orthogonaal) op elkaar.
- Zijn de assen onafhankelijk van elkaar, d.w.z. het veranderen van de waarde van één coördinaat heeft geen invloed op de andere.
- Hebben de assen een richting en grootte en kunnen daarom als vectoren worden beschouwd.

Een punt in de ruimte wordt weergegeven door zijn coördinaten, bijvoorbeeld A (x_a , y_a). De x_a kan worden gevonden door een lijn te tekenen die parallel loopt aan de y-as; waar die lijn de x-as snijdt, ligt het punt x_a . Hetzelfde geldt voor de y_a .

De afstand van punt A tot het oorsprongspunt kan worden gevonden met Pythagoras.

$$(A - Oorsprong)^2 = x_a^2 + y_a^2$$

Als we werken met een lijnstuk tussen A en B, dan is de lengte:

$$(A - B)^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$$

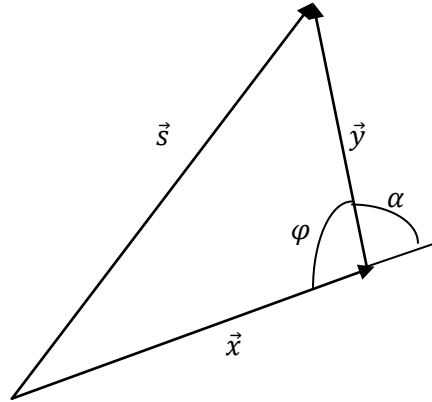
Het voordeel hiervan is dat de lengte van het lijnstuk onafhankelijk is van het willekeurig gekozen oorsprongspunt; d.w.z. de waarden van x_a , y_a , x_b , y_b veranderen wel, maar het verschil $|A - B|$, wat de lengte van het lijnstuk is, verandert niet.

5.2 Niet-Orthogonaal Coördinatensysteem

Om praktische redenen kan ook een coördinatensysteem worden gekozen waarvan de assen niet orthogonaal zijn. Ook in zo'n systeem kunnen we posities en afstanden beschrijven, maar de berekeningen worden iets complexer.

Een lijnstuk $\vec{s}$ in dit systeem is de som van de basisvectoren:

$$\vec{s} = \vec{x} + \vec{y}$$



De grootte s van $\vec{s}$ kan worden gevonden door het inproduct van $\vec{s}$ met zichzelf:

$$\begin{aligned}\vec{s} \cdot \vec{s} &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} \\ s^2 &= x^2 + (2 \cos \alpha)xy + y^2\end{aligned}$$

Als φ de hoek is tussen $\vec{x}$ en $\vec{y}$, dan is $\cos \alpha = -\cos \varphi$, en dus:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi \\ s^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi\end{aligned}$$

Dit is de bekende **cosinusregel**. Dus, naast de kwadraten van de coördinaten maakt ook het product van de coördinaten deel uit van de vergelijking.

5.3 Gekromde Coördinaten

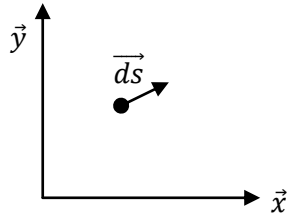
In plaats van coördinaatassen die niet orthogonaal zijn, kan het ook praktisch zijn om gekromde coördinaten te gebruiken. Werken met deze coördinaten is uiteraard complexer, maar Einstein hanteerde de volgende benadering: Een gekromde lijn kan worden beschouwd als een lijn opgebouwd uit oneindig kleine rechte lijnen. Door te kijken naar een oneindig klein gebied kunnen deze gekromde coördinaten worden beschouwd als een lokaal coördinatensysteem met rechte (lineaire) coördinaten, die echter niet per se rechthoekig zijn.

Omdat het coördinatensysteem hier oneindig kleine coördinaten betreft, worden de coördinaten aangeduid als dx , dy enzovoort. Bovendien hebben deze coördinaten coëfficiënten, en deze coëfficiënten bevatten informatie over de kromming van de coördinatensystemen. In het geval van kromming zijn deze coëfficiënten dus geen constante meer, maar parameters die afhankelijk zijn van hun locatie langs de coördinatensystemen.

Er wordt gezegd dat zwaartekracht de coördinatensystemen buigt en zo de ruimte-tijd vervormt, wat een zwaartekrachtsveld creëert en daardoor versnelling veroorzaakt. Door echter een gekromd coördinatensysteem zo te kiezen dat het zich beweegt en buigt in de richting van het zwaartekrachtsveld, wordt er geen kracht of zwaartekracht ervaren; dus op dezelfde manier als in de speciale relativiteitstheorie een bewegend coördinatensysteem werd gekozen om de snelheid van het bewegende object te neutraliseren.

5.4 Algemene Vorm voor een Coördinatensysteem

Laten we een vergelijking afleiden voor de relatie tussen een lijnsegment en zijn gebogen coördinatensysteem.



Zoals eerder vermeld is een oneindig klein lijnsegment $d\vec{s}$ een vector, en de grootte kan worden berekend zoals hierboven getoond:

$$\vec{ds} \cdot \vec{ds} = (\vec{dx} + \vec{dy}) \cdot (\vec{dx} + \vec{dy}) = \vec{dx} \cdot \vec{dx} + \vec{dx} \cdot \vec{dy} + \vec{dy} \cdot \vec{dx} + \vec{dy} \cdot \vec{dy}$$

(voor een lineair, niet – orthogonaal systeem)

Om een meer algemene vorm (niet per se orthogonaal) te hebben, wordt aangenomen dat elke term een coëfficiënt $g_{\mu\nu}$ heeft:

$$ds^2 = g_{xx} dx dx + g_{xy} dx dy + g_{yx} dy dx + g_{yy} dy dy$$

Hier, in het voorbeeld van de cosinusregel hierboven, is:

$$g_{xx} = g_{yy} = 1 \text{ and } g_{xy} = g_{yx} = -\cos \varphi$$

De $g_{\mu\nu}$ wordt de **metrische tensor** genoemd en kan, in dit tweedimensionale coördinatensysteem, worden beschouwd als een matrix met 2x2 elementen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{pmatrix}$$

5.5 De Metrische Tensor en Einstein-Notatie

Voor een algemeen vierdimensionaal ruimte-tijd-stelsel (met tijd als coördinaat ct) is de metriek een **4x4-tensor**. De algemene vorm luidt:

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

In Einstein notatie:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Hier lopen μ en ν van 0 tot 3, met coördinaten $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. De **metrische tensor** $g_{\mu\nu}$ bevat alle informatie over de kromming van de ruimte-tijd.

Voorbeeld van een metriek-tensor in matrixvorm:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Als het coördinatenstelsel **orthogonaal** is, dan zijn alle **kruistermen** (waarbij $\mu \neq \nu$) nul: $g_{\mu\nu} = 0$ voor $\mu \neq \nu$.

De waarde van ds^2 blijft **onveranderd** bij verandering van coördinatenstelsel, mits de bijhorende metriek correct aangepast wordt. Dat wil zeggen:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta}(y)dy^\alpha dy^\beta$$

Hier zie je dat $g_{\mu\nu}$ de "weegfactor" is die bepaalt hoe de infinitesimale verplaatsingen in de μ - en ν -richting bijdragen aan de lengte.

- De **diagonaalelementen** $g_{\mu\mu}$ kun je zien als de "schaalfactoren" voor de bijbehorende coördinaatrichting.
- De **niet-diagonale elementen** $g_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$) beschrijven juist of de coördinaatrichtingen *scheef* staan (dus niet loodrecht zijn). In zekere zin zijn die wél verwant aan richtingscosinussen (projecties van de ene as op de andere).

Samenvattend

- Een coördinatensysteem is een hulpmiddel om de ruimte te structureren; afstanden kunnen daarin worden berekend.
- In orthogonale systemen geldt Pythagoras; in niet-orthogonale systemen de cosinusregel.
- Gekromde coördinatenstelsels zijn nodig om zwaartekrachtsvelden in de algemene relativiteitstheorie te beschrijven.
- De **metriek** $g_{\mu\nu}$ bevat alle informatie over afstandsbepaling en kromming van de ruimte of ruimte-tijd.

5.6 Transformatie tussen twee Coördinatensystemen

Zoals eerder vermeld, kan bij een gebogen coördinatensysteem "lokaal", in een oneindig klein gebied, een coördinatensysteem met rechte lijnen worden gebruikt. Voor een vierdimensionaal coördinatensysteem heeft elke nieuwe coördinaat, in het nieuwe x -stelsel, een lineaire relatie met alle oude coördinaten, in het oude y -stelsel, volgens de vergelijking:

$$dx^0 = \frac{\partial x^0}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^0}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^0}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^0}{\partial y^3} dy^3$$

Hetzelfde geldt voor de drie andere coördinaten en dit leidt tot de algemene formule:

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r$$

De sommatie gebeurt over de herhaalde index r .

Hierbij wordt impliciet gesommeerd over de index r volgens de **Einstein-notatie**. Dit betekent dat voor elke waarde van m , de afgeleiden over alle waarden van r (van 0 tot 3) worden opgeteld. Deze formule beschrijft hoe een infinitesimale verandering in het nieuwe coördinatenstelsel x^m wordt opgebouwd uit veranderingen in het oude stelsel y^r .

5.6.1 Uitgebreide Toelichting op de Metrische Tensor

We beginnen met een Cartesiaans coördinatenstelsel, dat in dit geval vergelijkbaar is met de Minkowski-vergelijking (zie hoofdstuk [5.10.1](#) en [Appendix 9.1](#) vergelijking [11a](#)) in de speciale relativiteitstheorie:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Om de notatie compacter en algemener te maken, hernoemen we de differentiaaltermen:

$$cdt = dx^0, dx = dx^1, dy = dx^2, dz = dx^3$$

Hierbij hebben alle differentiaaltermen de dimensie van lengte (meters). In deze notatie wordt de ruimte-tijdinterval geschreven als:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

De **metrische tensor** $\eta_{\mu\nu}$ (de Minkowski-metriek) is in matrixvorm:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Deze tensor beschrijft de afstandsstructuur van de vlakke ruimte-tijd. De afstand tussen twee gebeurtenissen is dus:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Nu beschouwen we een willekeurig coördinatenstelsel y^α , met coördinaten y^0, y^1, y^2, y^3 . De relatie tussen het oude en het nieuwe stelsel wordt gegeven door de kettingregel:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^3} dy^3$$

Of in compacte notatie:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} dy^\alpha$$

En:

$$dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} dy^\beta$$

Substitutie in de Minkowski-vorm:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

levert:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

We definiëren nu een nieuwe metrische tensor $g_{\alpha\beta}$ in het coördinatenstelsel y^α , als volgt:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}$$

Zodat:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

Gaan we vervolgens over naar een ander willekeurig coördinatenstelsel x^μ , dan geldt de inverse transformatie:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Hieruit volgt de algemene transformatieformule voor de metrische tensor:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(y)$$

Deze formule beschrijft hoe de componenten van de metrische tensor transformeren onder een algemene coördinatentransformatie. Het is een fundamenteel resultaat in de algemene relativiteitstheorie en vormt de basis voor het begrip van gekromde ruimte-tijd.

5.7 Transformatie tussen Cartesiaanse en Sferische (infinitesimale) Coördinaten

Als voorbeeld voeren we nu de transformatie uit van een Cartesiaans naar een sferisch coördinatenstelsel. We nemen aan dat de lezer bekend is met de standaardtransformatie tussen beide stelsels (zie onderstaande afbeelding):

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

Afleiding van dx , dy en dz :

We differentiëren bovenstaande uitdrukkingen om de infinitesimale verplaatsingen te verkrijgen

$$\begin{aligned} \vec{dx} &= \sin \theta \cos \varphi \vec{dr} + r \cos \theta \cos \varphi \vec{d\theta} - r \sin \theta \sin \varphi \vec{d\varphi} \\ \vec{dy} &= \sin \theta \sin \varphi \vec{dr} + r \cos \theta \sin \varphi \vec{d\theta} + r \sin \theta \cos \varphi \vec{d\varphi} \\ \vec{dz} &= \cos \theta \vec{dr} - r \sin \theta \vec{d\theta} \end{aligned}$$

Deze vectoriële differentieën beschrijven de infinitesimale verplaatsingen in de x -, y - en z -richtingen in termen van dr , $d\theta$, en $d\varphi$.

Bepaling van het kwadraat van de differentiëlen

Om de grootte van dx , dy en dz te bepalen, nemen we het inwendig product van elk van hen:

$$dx^2 = \overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{dx}; \quad dy^2 = \overrightarrow{dy} \cdot \overrightarrow{dy}; \quad dz^2 = \overrightarrow{dz} \cdot \overrightarrow{dz}$$

Omdat de coördinaten r , θ en φ loodrecht op elkaar staan, zijn de kruisproducten nul, wat resulteert in:

$$dx^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\varphi^2$$

$$dy^2 = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\varphi^2$$

$$dz^2 = \cos^2 \theta dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2$$

Optelling van $dx^2 + dy^2 + dz^2$

Door de drie bovenstaande uitdrukkingen op te tellen, krijgen we:

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= \sin^2 \theta \cos^2 \varphi dr^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi dr^2 + \cos^2 \theta dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi d\theta^2 \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\varphi^2 \end{aligned}$$

Gebruikmakend van de goniometrische identiteiten:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

wordt dit vereenvoudigd tot:

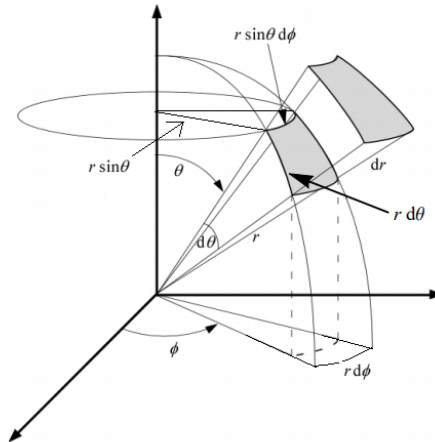
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1)$$

Deze uitdrukking is precies de ruimtelijke component van de metriek in sferische coördinaten. De tijdcomponent kan toegevoegd worden als $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, of in sferische vorm:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Volume-element in Sferische Coördinaten

Dit beschrijft de transformatie van een stelsel met Cartesiaanse coördinaten naar een stelsel met sferische coördinaten.



Het volume-element in Cartesische coördinaten is:

$$dV = dx dy dz$$

Na transformatie naar sferische coördinaten wordt dit:

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Berekening van het Volume van een Bol

Het totale volume van een bol met straal R volgt uit de integraal:

$$V = \iiint r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

met de integratiegrenzen:

- $r \in [0, R]$
- $\theta \in [0, \pi]$
- $\phi \in [0, 2\pi]$

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$V = \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cdot \phi \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Dit bevestigt het bekende resultaat voor het volume van een bol.

5.8 Oefening: Toepassen van de Metrische Transformatieformule

We laten hier zien hoe de **metrische transformatieformule** formeel wordt toegepast bij het overgaan van een Cartesisch naar een sferisch coördinatensysteem.

1. Algemene formules

We herinneren aan de volgende relaties:

1.1. Transformatie van coördinaten

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r$$

1.2. Lijnelement in Cartesiaanse coördinaten

$$ds^2 = \eta_{mn} d\xi^m d\xi^n$$

1.3. Invariance van het lijnelement onder coördinatentransformatie

$$ds^2 = g_{mn}(x) dx^m dx^n = g_{pq}(y) dy^p dy^q$$

1.4. Transformatieformule voor de metriek

$$g_{pq}(y) = g_{mn}(x) \frac{dx^m}{dy^p} \frac{dx^n}{dy^q}$$

2. Van Cartesiaans naar Sferisch

We beschouwen de volgende Cartesiaanse metriek (in vierdimensionale ruimte-tijd met signatuur (+, -, -, -)):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

De corresponderende vorm in sferische coördinaten is (met [vergelijking 4.6.1](#)):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

De metrische tensor in Cartesiaanse coördinaten is:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hier is dus $g_{00} = 1$, $g_{11} = -1$, $g_{22} = -1$ en $g_{33} = -1$ voor Cartesiaanse elementen en de overige elementen zijn nul.

Onze doelstelling is nu: **vind de metriek $g_{\mu\nu}$ in sferische coördinaten.**

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

3. Coördinatentransformatie

De sferische coördinaten worden uitgedrukt als functie van de Cartesiaanse coördinaten:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

We passen de transformatieformule toe:

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r$$

Wanneer we deze formule volledig uitschrijven dan ziet het er als volgt uit:

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t} dt + \frac{\partial t}{\partial r} dr + \frac{\partial t}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial t}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi$$

De differentiëlen worden:

$$dt = dt$$

$$dx = \sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi$$

$$dy = \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

Dus de elementen van de metrische tensor zijn:

$\frac{\partial t}{\partial t} = 1$	$\frac{\partial t}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial t}{\partial \theta} = 0$	$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0$
$\frac{\partial x}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial x}{\partial r} = + \sin \theta \cos \varphi$	$\frac{\partial x}{\partial \theta} = + r \cos \theta \cos \varphi$	$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = - r \sin \theta \sin \varphi$
$\frac{\partial y}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial y}{\partial r} = + \sin \theta \sin \varphi$	$\frac{\partial y}{\partial \theta} = + r \cos \theta \sin \varphi$	$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = + r \sin \theta \cos \varphi$
$\frac{\partial z}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial r} = + \cos \theta$	$\frac{\partial z}{\partial \theta} = - r \sin \theta$	$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$

4. Berekenen van de Nieuwe Metriek

We passen nu de transformatieformule toe:

$$g_{pq}(y) = g_{mn}(x) \frac{dx^m}{dy^p} \frac{dx^n}{dy^q}$$

We werken nu de metrische tensor elementen uit:

$$\begin{aligned} g_{00}(y) &= g_{00}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{01}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{02}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{03}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0} + \\ &g_{10}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{11}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{12}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{13}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0} + \\ &g_{20}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{21}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{22}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{23}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0} + \\ &g_{30}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{31}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{32}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{33}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0} \end{aligned}$$

Al voorbeeld vullen we nu de juiste sferische en cartesische coördinaten in:

$$\begin{aligned} g_{rr} &= g_{tt} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{tx} \frac{dt}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{ty} \frac{dt}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{tz} \frac{dt}{dr} \frac{dz}{dr} + \\ &g_{xt} \frac{dx}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{xx} \frac{dx}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{xy} \frac{dx}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{xz} \frac{dx}{dr} \frac{dz}{dr} + \\ &g_{yt} \frac{dy}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{yx} \frac{dy}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{yy} \frac{dy}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{yz} \frac{dy}{dr} \frac{dz}{dr} + \\ &g_{zt} \frac{dz}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{zx} \frac{dz}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{zy} \frac{dz}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{zz} \frac{dz}{dr} \frac{dz}{dr} \end{aligned}$$

Omdat het coördinaten systeem hier een orthogonaal systeem is, zijn alleen die elementen met gelijke indices niet nul.

Dus de matrix hierboven wordt uiteindelijk:

1.5. Tijdcomponent:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= g_{tt} \frac{dt}{dt} \frac{dt}{dt} + g_{xx} \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} + g_{yy} \frac{dy}{dt} \frac{dy}{dt} + g_{zz} \frac{dz}{dt} \frac{dz}{dt} \\ g_{tt} &= 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

1.6. Radiale component:

$$g_{rr} = g_{tt} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{xx} \frac{dx}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{yy} \frac{dy}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{zz} \frac{dz}{dr} \frac{dz}{dr}$$

$$g_{rr} = 0 - 1(+\sin \theta \cos \varphi)^2 - 1(+\sin \theta \sin \varphi)^2 - 1(+\cos \theta)^2 = -\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi = -1$$

1.7. Hoekcomponent θ :

$$g_{\theta\theta} = g_{tt} \frac{dt}{d\theta} \frac{dt}{d\theta} + g_{xx} \frac{dx}{d\theta} \frac{dx}{d\theta} + g_{yy} \frac{dy}{d\theta} \frac{dy}{d\theta} + g_{zz} \frac{dz}{d\theta} \frac{dz}{d\theta}$$

$$g_{\theta\theta} = 0 - 1(+r \cos \theta \cos \varphi)^2 - 1(+r \cos \theta \sin \varphi)^2 - 1(-r \sin \theta)^2 = -r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = -r^2$$

1.8. Hoekcomponent φ :

$$g_{\varphi\varphi} = g_{tt} \frac{dt}{d\varphi} \frac{dt}{d\varphi} + g_{xx} \frac{dx}{d\varphi} \frac{dx}{d\varphi} + g_{yy} \frac{dy}{d\varphi} \frac{dy}{d\varphi} + g_{zz} \frac{dz}{d\varphi} \frac{dz}{d\varphi}$$

$$g_{\varphi\varphi} = 0 - 1(-r \sin \theta \sin \varphi)^2 - 1(+r \sin \theta \cos \varphi)^2 - 0 = -r^2 \sin^2 \varphi$$

Resultaat

Dus de transformatie van een Cartesiaanse naar een sferische metrische tensor levert de volgende elementen op:

$$\begin{array}{llll} g_{00} = 1 & g_{11} = -1 & g_{22} = -1 & g_{33} = -1 \\ g_{tt} = 1 & g_{rr} = -1 & g_{\theta\theta} = -r^2 & g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \varphi \end{array}$$

Of in matrix vorm:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Dit komt overeen met de metriek van een sferisch coördinatensysteem in een driedimensionale ruimte.

Conclusie

De toepassing van de metrische transformatieformule op de overgang van Cartesiaanse naar sferische coördinaten leidt tot de verwachte sferische vorm van de ruimte-tijd-metriek. Deze oefening illustreert hoe tensortransformaties gebruikt worden om coördinaat-invariantie van fysische wetten te garanderen binnen de algemene relativiteitstheorie.

5.9 Verdere Overwegingen over Co- en Contravariante Transformaties

5.9.1 Inleiding

In deze sectie onderzoeken we hoe basisvectoren en vectorcomponenten transformeren onder een coördinatentransformatie. We bekijken zowel de directe als de inverse transformatie en controleren hun consistentie. Deze overwegingen vormen de basis voor het begrip van covariante en contravariante objecten in de tensoranalyse.

5.9.2 Covariante Transformatie van Basisvectoren en Duale Vectoren (of één-vormen):

Beschouw een tweedimensionaal vectorruimte met oorspronkelijke basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$, die getransformeerd worden naar een nieuw coördinatenstelsel met basisvectoren $\vec{e}'_1$ en $\vec{e}'_2$. Deze transformatie is lineair en kan geschreven worden als:

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2\end{aligned}$$

Dit kan in matrixvorm worden geschreven als:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

Of korter:

$$\vec{e}' = A\vec{e}$$

5.9.2.1 Inverse Transformatie van de Basisvectoren

Om de inverse transformatie (van het getransformeerde naar het oorspronkelijke systeem) te vinden, lossen we $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ op in termen van $\vec{e}'_1$ en $\vec{e}'_2$.

Stap 1: Lineaire combinatie opstellen

We nemen combinaties van de oorspronkelijke transformaties om $\vec{e}_1$ te isoleren:

$$\begin{aligned}a_{22}\vec{e}'_1 &= a_{11}a_{22}\vec{e}_1 + a_{12}a_{22}\vec{e}_2 \\ a_{12}\vec{e}'_2 &= a_{12}a_{21}\vec{e}_1 + a_{12}a_{22}\vec{e}_2\end{aligned}$$

Aftrekken geeft:

$$a_{22}\vec{e}'_1 - a_{12}\vec{e}'_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\vec{e}_1$$

Dit geeft ons de uitdrukking voor $\vec{e}_1$:

$$\vec{e}_1 = \frac{a_{22}\vec{e}'_1 - a_{12}\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Stap 2: Idem voor $\vec{e}_2$

Op analoge wijze vinden we:

$$a_{21}\vec{e}'_1 = a_{11}a_{21}\vec{e}_1 + a_{12}a_{21}\vec{e}_2$$

$$a_{11}\vec{e}'_2 = a_{11}a_{21}\vec{e}_1 + a_{11}a_{22}\vec{e}_2$$

Nu vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met a_{21} en de tweede met a_{11} en trekken deze weer van elkaar af om $\vec{e}_2$ te vinden:

$$a_{21}\vec{e}'_1 - a_{11}\vec{e}'_2 = (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})\vec{e}_2$$

Dus de uitdrukking voor $\vec{e}_2$ is:

$$\vec{e}_2 = \frac{-a_{21}\vec{e}'_1 + a_{11}\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

In matrixvorm is de inverse transformatie:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix}$$

Of korter:

$$\vec{e} = (A^{-1})\vec{e}'$$

5.9.2.2 Controle van de Inverse Transformatie

We kunnen controleren of A en A^{-1} inderdaad elkaars inversen zijn, door de twee matrices met elkaar te vermenigvuldigen, en te kijken of ze de eenheidsmatrix $A^{-1}A = I$ opleveren:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Nu vermenigvuldigen we A^{-1} met A :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \\ & \frac{\begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} & a_{22}a_{21} - a_{21}a_{22} \\ -a_{12}a_{11} + a_{11}a_{12} & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = \\ & \frac{\begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = \end{aligned}$$

$$\frac{(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} =$$

Dit vereenvoudigt tot de eenheidsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dus:

$$A^{-1}A = I$$

de inverse transformatie is correct *Q.E.D.*

5.9.2.3 Conclusie

We hebben de covariante transformatie voor basisvectoren en de inverse ervan afgeleid in een tweedimensionale ruimte. We hebben gecontroleerd dat de transformatie en de inverse elkaar opheffen tot de eenheidsmatrix, wat de consistentie van de transformatie tussen basisvectoren in verschillende coördinatensystemen bevestigt. Deze formele consistentie is essentieel voor het correct toepassen van tensortransformaties in de algemene relativiteitstheorie.

5.9.3 Contravariante Transformatie van Vectorcomponenten

In de differentiaalmeetkunde is het essentieel om onderscheid te maken tussen hoe basisvectoren (covariant) en hoe de componenten van vectoren (contravariant) transformeren onder een coördinatentransformatie. In deze sectie bekijken we de transformatie-eigenschappen van contravariante vectorcomponenten in een tweedimensionale ruimte.

Vectorinvariantie en Componenttransformatie

Een vector $\vec{V}$ blijft geometrisch gezien hetzelfde onder een coördinatentransformatie, maar zijn componenten veranderen. Stel dat we in het oorspronkelijke coördinatensysteem schrijven::

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2$$

en in het nieuwe (getransformeerde) systeem:

$$\vec{V} = V'_1 \vec{e}'_1 + V'_2 \vec{e}'_2$$

Aangezien de vector zelf invariant blijft, moeten de componenten V_i veranderen als de basisvectoren veranderen.

Basisverandering

De nieuwe basisvectoren zijn lineair gerelateerd aan de oorspronkelijke basisvectoren via een matrix A :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}, \text{ waar } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

De inverse transformatie voor de basisvectoren is dan:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{pmatrix}$$

Afleiding van de Contravariante Transformatie

Door de basisvectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ uit te drukken in termen van $\vec{e}'_1$ en $\vec{e}'_2$, krijgen we:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 \\ \vec{V} &= V_1 \left(\frac{a_{22} \vec{e}'_1 - a_{12} \vec{e}'_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right) + V_2 \left(\frac{-a_{21} \vec{e}'_1 + a_{11} \vec{e}'_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right) \end{aligned}$$

Dit kan worden herschreven als:

$$\vec{V} = \left(\frac{a_{22} V_1 - a_{12} V_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right) \vec{e}'_1 + \left(\frac{-a_{21} V_1 + a_{11} V_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right) \vec{e}'_2$$

Door de termen samen te voegen:

$$\vec{V} = \frac{(a_{22} V_1 - a_{12} V_2) \vec{e}'_1 + (-a_{21} V_1 + a_{11} V_2) \vec{e}'_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

En we weten ook dat:

$$\vec{V} = V'_1 \vec{e}'_1 + V'_2 \vec{e}'_2$$

Hieruit volgen de transformaties voor de componenten van de vector:

$$\begin{aligned} V'_1 &= \frac{(a_{22} V_1 - a_{12} V_2)}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ V'_2 &= \frac{(-a_{21} V_1 + a_{11} V_2)}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{aligned}$$

In matrixvorm kunnen we dit schrijven als:

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Dus:

$$\vec{V}' = (\mathbf{A}^{-1})^T \vec{V}$$

Inverse Transformatie van de Componenten

Nu voor de inverse transformatie, beginnend met de getransformeerde vectorcomponenten:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= V'_1 \vec{e}'_1 + V'_2 \vec{e}'_2 \\ \vec{V} &= V'_1 (a_{11} \vec{e}_1 + a_{12} \vec{e}_2) + V'_2 (a_{21} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2)\end{aligned}$$

Dit geeft:

$$\vec{V} = (a_{11} V'_1 + a_{21} V'_2) \vec{e}_1 + (a_{12} V'_1 + a_{22} V'_2) \vec{e}_2$$

Wat overeenkomt met:

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2$$

Hieruit volgen de relaties voor de oorspronkelijke vectorcomponenten:

$$\begin{aligned}V_1 &= a_{11} V'_1 + a_{21} V'_2 \\ V_2 &= a_{12} V'_1 + a_{22} V'_2\end{aligned}$$

In matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix}$$

De basisvectoren transformeren volgens:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Daarentegen transformeren de vectorcomponenten in de tegengestelde richting:

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

5.9.4 Samenvatting van de Transformaties

De kernrelaties zijn als volgt:

1.9. Basisvectoren (covariant):

$$\begin{aligned}\vec{e}' &= A \vec{e} \\ \vec{e} &= (A^{-1}) \vec{e}'\end{aligned}$$

1.10. Vectorcomponenten (contravariant):

$$\begin{aligned}\vec{V}' &= (A^{-1})^T \vec{V} \\ \vec{V} &= A^T \vec{V}'\end{aligned}$$

Dus als de basis vectoren (covariante vectoren) transformeren met:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Terwijl de relatie tussen:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix}$$

is

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T$$

De getransponeerde van $\mathbf{A}$:

Dan transformeren de contravariante vectoren volgens:

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

Dit is de inverse en zijn getransponeerde.

Conclusie

Wanneer het coördinatensysteem verandert, transformeren de basisvectoren volgens een matrix $\mathbf{A}$, terwijl de vectorcomponenten transformeren met de inverse getransponeerde $(\mathbf{A}^{-1})^T$. Deze contravariante transformatie zorgt ervoor dat de vector $\vec{V}$ zelf invariant blijft - zijn representatie past zich aan de veranderende basis aan, zodat de meetkundige betekenis behouden blijft.

5.10 Overwegingen over de Minkowski- en Schwarzschild-Formules

5.10.1 Minkowski-ruimte

De Minkowski-metrick wordt gebruikt binnen de speciale relativiteitstheorie, waarin de effecten van zwaartekracht en versnelling worden verwaarloosd. In deze context bewegen referentiestelsels uniform met constante snelheid ten opzichte van elkaar, en het gebruikte coördinatenstelsel is lineair en vlak.

Beschouw een punt K in de ruimte-tijd met een eigen coördinatensysteem. In dit systeem bevindt K zich voortdurend in de oorsprong, zodat enkel de tijd voortschrijdt. De afstand in ruimte-tijd - het interval - is dan gegeven door:

$$s = ct,$$

waarbij τ de eigen tijd is, gemeten door een klok die meebeweegt met K .

Een waarnemer bevindt zich elders in de ruimte-tijd met een ander inertiaalstelsel, dat relatief beweegt ten opzichte van K . Indien de waarnemer waarneemt dat K zich in de ruimte verplaatst, dan is de gemeten snelheid van K :

$$v^2 = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{t^2}$$

De Minkowski-metrick in vierdimensionale ruimte-tijd wordt dan geschreven als:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Voor een infinitesimaal segment langs een wereldlijn geldt:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Dit differentiaalsegment is als het ware een raaklijn aan de wereldlijn in ruimte-tijd. Ook als de wereldlijn gekromd is (zoals bij versnelling of in aanwezigheid van zwaartekracht), kunnen we haar lokaal benaderen als opgebouwd uit lineaire segmenten.

De coördinaten t , x , y en z vertegenwoordigen vier componenten van een ruimte-tijdvector. In een orthogonaal coördinatensysteem (zoals in de Minkowski-ruimte) kan het interval worden berekend via een gegeneraliseerde Pythagoras-stelling. Indien we de tijdscomponent als imaginair nemen ict , en de ruimtecomponenten als reëel, dan volgt de bekende Minkowski-vorm.

Om de algemene structuur van een interval s in vier dimensies te beschrijven, kunnen we schrijven:

We moeten beseffen dat t , x , y en z een grootte en richting hebben; ze zijn vectoren. Het vinden van de grootte van s betekent het optellen van de vier vectoren. Als dit coördinatensysteem een orthogonaal systeem is, kan de stelling van Pythagoras worden toegepast op het ruimtedeel. Als we het tijdsdeel beschouwen als complex $icdt$, en voor de linkerkant van de formule $ds=icdt$, dan krijgen we door de coördinaten te kwadrateren de Minkowski-formule.

$$\vec{s} = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2$$

Om de grootte van s te vinden, berekenen we het inproduct van s door s met zichzelf te vermenigvuldigen:

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = (a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2) \cdot (a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2),$$

Wat resulteert in:

$$s^2 = a_1^2 x_1^2 + a_1 a_2 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 + a_1 a_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 + a_2^2 x_2^2$$

In vier dimensies veralgemeniseren we dit met behulp van de metrische tensor $g_{\mu\nu}$:

$$s^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

Of in de notatie van Einstein (som over de herhaalde lage en hoge indices):

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

Bij gebruik van een lokaal orthogonaal coördinatenstelsel, verdwijnen alle producten waarbij $\mu \neq \nu$. Als alleen een infinitesimaal klein lokaal “gebied” wordt beschouwd, wordt dx in plaats van x gebruikt, en hetzelfde geldt voor de overige coördinaten. Ten slotte resulteert de vergelijking in een Minkowski- of Schwarzschild-vorm:

$$ds^2 = (cdx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Algemeen:

$$ds^2 = g_{00}(cdx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$$

In de Minkowski-ruimte zijn de componenten van de metrische tensor constant:

$$g_{00} = 1 \text{ en } g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

Betekenis van de Minkowski-formule

De Minkowski-intervalformule luidt:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

De linkerkant representeert een object dat zich in zijn eigen (meebewegende) referentiestelsel bevindt: het ervaart uitsluitend een voortgang in eigen tijd τ . Een waarnemer in het coördinatenstelsel t, x, y, z , ziet het object bewegen met snelheid:

$$v^2 = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2}$$

En een tweede waarnemer in een ander inertiaalstelsel t', x', y', z' meet:

$$v'^2 = \frac{(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)}{dt'^2}$$

De relatie tussen eigen tijd τ en coördinaattijd t wordt gegeven door:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2$$

Dus:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{c^2 dt^2}{\gamma^2}$$

Hier is τ de zogenaamde eigen tijd, dat wil zeggen de tijd van een bewegende klok die zich in de oorsprong van zijn eigen meebewegende coördinatenstelsel bevindt.

De relatie tussen de eigen tijd τ in het ds -systeem en de waarnemer is:

$$d\tau^2 = \frac{dt^2}{\gamma^2}$$

$$dt = \gamma d\tau$$

waarbij de Lorentzfactor γ gedefinieerd is als:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Omdat $\gamma \geq 1$, is $d\tau \leq dt$: een bewegende klok loopt langzamer dan een klok in rust vanuit het perspectief van een externe waarnemer.

5.10.2 Transformaties uitgevoerd door Schwarzschild

De Schwarzschild-metrick vormt een uitbreiding van de Minkowski-metrick doordat ze ook rekening houdt met de effecten van massa en zwaartekracht. In tegenstelling tot de vlakke ruimte-tijd van de speciale relativiteitstheorie, resulteert dit in een gekromde ruimte-tijd. Deze kromming vertaalt zich in een niet-lineair coördinatenstelsel, aangepast aan de sferische symmetrie rond een massief lichaam.

Van Cartesisch naar sferisch

Schwarzschild begint met de gebruikelijke vlakke (Cartesische) coördinaten en voert een transformatie uit naar sferische coördinaten (r, θ, ϕ) . Dit resulteert in de volgende uitdrukking voor het ruimte-tijd-interval (in natuurlijke eenheden $G=c=1$ wordt dit vaak genoteerd zonder c , maar we behouden ze hier voor didactische duidelijkheid):

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Met:

$$\sigma^2 = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$$

De determinant van de metrick

De determinant g van de metrische tensor blijkt in deze coördinaten:

$$g = \sigma^2 \cdot \left(\frac{-1}{\sigma^2}\right) \cdot (-r^2) \cdot (-r^2 \sin^2 \theta) = -r^4 \sin^2 \theta$$

Einstein had echter in zijn veldvergelijkingen graag dat in geschikte coördinaten $g=-1$ zou gelden (zoals bij de Minkowski-metrick). Schwarzschild onderzoekt daarom of er een coördinaten-transformatie bestaat die deze voorwaarde oplevert.

Transformatie naar nieuwe coördinaten

Om de determinant te normaliseren tot $g=-1$, definieert Schwarzschild nieuwe coördinaten (x_1, x_2, x_3) , gebaseerd op:

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{1}{r^2}, \quad \frac{d\theta}{dx_2} = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \frac{d\phi}{dx_3} = 1$$

Schwarzschild merkt op: "De nieuwe variabelen zijn de *poolcoördinaten met determinant 1*". Om deze afgeleiden te verkrijgen, vindt hij de volgende relaties:

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos \theta, \quad x_3 = \phi$$

Deze nieuwe coördinaten transformeren de metriek tot:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - r^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} dx_2^2 - r^2 \sin^2 \theta dx_3^2$$

Substitutie van trigonometrische relaties

Omdat $x_2 = -\cos \theta$, geldt:

$$x_2^2 = \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - x_2^2$$

Daarmee herschrijven we de metriek als:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - r^2 \frac{1}{1 - x_2^2} dx_2^2 - r^2 (1 - x_2^2) dx_3^2$$

De nieuwe metriekcomponenten

De componenten van de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ in deze getransformeerde coördinaten zijn nu:

$$g_{00} = \sigma^2$$

$$g_{11} = -\frac{1}{r^4 \sigma^2}$$

$$g_{22} = -\frac{r^2}{1 - x_2^2}$$

$$g_{33} = -r^2 (1 - x_2^2)$$

De determinant g van deze tensor is nu:

$$g = g_{00} \cdot g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33} = -1$$

Precies zoals gewenst. De transformatie die Schwarzschild uitvoerde is dus geldig en resulteert in een metriek met determinant -1, ondanks de gekromde aard van de ruimte-tijd.

Bijzondere gevallen

In het specifieke geval $\theta = 90^\circ$, geldt $\cos \theta = 0$ en dus $x_2 = 0$, wat leidt tot:

$$\sin^2 \theta = 1 \Rightarrow ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - r^2 dx_2^2 - r^2 dx_3^2$$

In dit vlak rond het equatoriale vlak wordt de metriek nog eenvoudiger van vorm.

5.11 Schwarzschild's: "On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory"

Het doel van Karl Schwarzschild in zijn artikel uit 1916 was het vinden van een exacte oplossing van de Einstein-veldvergelijkingen in vacuüm. Deze oplossing beschrijft de ruimte-tijd rond een massapunt dat langs een geodetische lijn beweegt in een vierdimensionale variëteit, waarbij het ruimte-tijd-interval ds centraal staat.

Voorwaarden voor de oplossing

De volgende voorwaarden worden aan de oplossing gesteld:

1. **Tijdsonafhankelijkheid:** Alle componenten van de metriek zijn onafhankelijk van de tijdscoördinaat x_4 .
2. **Geen ruimte-tijd-koppeling:** De gemengde componenten $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ voor $\rho = 1, 2, 3$.
3. **Sferische symmetrie:** De oplossing is invariant onder orthogonale transformaties (rotaties) van x_1, x_2, x_3 ; dit reflecteert sferische symmetrie.
4. **Asymptotische vlakheid:** Op oneindige afstand verdwijnen de componenten van de metrische tensor, met uitzondering van de volgende limieten:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{44} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

Van Cartesiaanse naar bolcoördinaten

Schwarzschild begint met een algemene metriek in Cartesiaanse coördinaten:

$$ds^2 = F dt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

Vervolgens voert hij de standaardtransformaties naar bolcoördinaten uit:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta;$$

Na substitutie krijgen we voor het ruimte-tijd-interval in bolcoördinaten:

$$ds^2 = F dt^2 - G(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - Hr^2 dr^2$$

Dit wordt herschreven tot:

$$ds^2 = F dt^2 - (G + Hr^2) dr^2 - Gr^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

Transformatie naar determinant 1

Omdat de determinant van de metriek in dit geval niet gelijk is aan -1, voert Schwarzschild een transformatie uit naar nieuwe variabelen waarmee deze voorwaarde wel vervuld wordt. Hij definieert:

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos \vartheta, \quad x_3 = \varphi$$

Daarmee wordt het lijnsegment:

$$ds^2 = F dt^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2} \right) dx_1^2 - Gr^2 \left[\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + dx_3^2(1-x_2^2) \right]$$

De Schwarzschild-oplossing

Door deze metriek in te vullen in de Einstein-veldvergelijkingen en deze op te lossen in vacuüm ($T_{\mu\nu} = 0$), vindt Schwarzschild de bekende oplossing:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (12)$$

Deze vergelijking beschrijft de gekromde ruimte-tijd rondom een sferisch symmetrisch massapunt in vacuüm. Hoewel Schwarzschild zijn afleiding begon met Cartesiaanse coördinaten, is de uiteindelijke oplossing handiger en inzichtelijker in bolcoördinaten, gezien de sferische symmetrie van het probleem.

Er bestaat ook een minder gebruikelijke vorm van de Schwarzschild-oplossing in Cartesiaanse coördinaten, die als volgt luidt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{\frac{2GM}{c^2 r}}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) r^2} (x dx + y dy + z dz)^2 \quad (13)$$

Deze vorm is echter zelden praktisch, omdat bolcoördinaten veel beter passen bij de symmetrie van het probleem, bijvoorbeeld in toepassingen zoals de beschrijving van zwarte gaten of de buitenkant van sterren.

Bronnen

- **Schwarzschild, K.**, *On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*, gepubliceerd op 13 januari 1916.
- **Oas, G.**, diverse besprekingen en analyses van de Schwarzschild-oplossing. Zie ook het hoofdstuk *Bibliografie* aan het einde van dit document.

De Schwarzschild-oplossing vormt een hoeksteen van de algemene relativiteitstheorie en wordt veelvuldig toegepast in de astrofysica bij de studie van zwarte gaten, neutronensterren en andere objecten met extreem sterke zwaartekrachtsvelden.

Deel VI – Validatie van de Theorie

6 Controle of de Schwarzschild Metriek voldoet aan de Einstein Veldvergelijkingen

We gaan nu wiskundig verifiëren of de vergelijking van Schwarzschild voldoet aan de Einstein Veldvergelijkingen. We doen dit in eerste instantie aan de volledige veldvergelijkingen en vervolgens aan de gesimplificeerde vorm.

6.1 Verificatie aan de Volledige Veldvergelijkingen

De algemene vorm van de Einstein-veldvergelijkingen luidt als volgt:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Hierin beschrijft de linkerkant de geometrie van de ruimte-tijd, terwijl de rechterkant de inhoud van massa en energie vertegenwoordigt. De constante λ is de kosmologische constante, die doorgaans verwaarloosbaar klein is bij berekeningen op astrofysische of planetaire schaal. Daarom wordt meestal gewerkt met de vereenvoudigde vergelijking:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Het linkerdeel van de formule stelt de geometrie voor terwijl het rechterdeel wordt gevormd door de massa en energie. In vacuümgebieden – dus buiten een massa – geldt $T_{\mu\nu} = 0$, zodat de vergelijking reduceert tot:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

De indices μ en ν nemen elk vier waarden aan (0 tot 3), wat resulteert in 16 gekoppelde differentiaalvergelijkingen. De veldvergelijkingen zijn volledig afhankelijk van de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ en de eerste en tweede afgeleiden ervan. Dit komt doordat ze uitsluitend zijn opgebouwd uit de Christoffel-symbolen en hun afgeleiden, en de Christoffel-symbolen zelf zijn volledig bepaald door de metriek en haar eerste afgeleiden.

Interpretatie: In vacuümgebieden buiten een massa reduceert de volledige Einstein-veldvergelijking tot de bovenstaande vergelijking. Dit betekent dat de Ricci-tensorcomponenten nul moeten zijn, wat de geometrie van lege ruimte beschrijft.

6.1.1 De Schwarzschild-oplossing

Karl Schwarzschild vond een exacte oplossing van de veldvergelijkingen in vacuüm, uitgaande van sferische symmetrie. De metriek is:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

met:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

De algemene vorm van de metriek in coördinatennotatie is:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\phi^2$$

Hieruit blijkt dat slechts vier van de zestien metrische componenten niet nul zijn. Daarom zijn er ook slechts vier relevante componenten van de Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$, namelijk:

$$R_{00}, \quad R_{11}, \quad R_{22}, \quad R_{33}$$

Interpretatie: De Schwarzschild-metriek beschrijft de kromming van ruimte-tijd rond een sferisch symmetrische massa. De functie bepaalt de sterkte van de zwaartekracht afhankelijk van de afstand tot de massa.

6.1.2 De Ricci-tensor en Christoffel-symbolen

De Ricci-tensor is gedefinieerd als:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$$

Met de algemene uitdrukking:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}$$

Of anders geschreven:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}$$

Deze formule is samengesteld uit afgeleiden en producten van de Christoffel-symbolen. De algemene vorm van een Christoffel-symbool is:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

6.1.3 Vereenvoudiging in vacuüm

Zoals eerder aangegeven geldt in vacuüm:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

Hier staat R voor de Ricci-scalar en vertegenwoordigt de kromming van de lokale ruimte-tijd. De Ricci-scalar is een maat voor de totale kromming van de ruimte-tijd op een bepaald punt en wordt berekend als de contractie van de Ricci-tensor:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Dit betekent dat de Ricci-scalar een samenvatting is van hoe de ruimte-tijd in alle richtingen kromt, gebaseerd op de informatie in de Ricci-tensor. In het geval van de veldvergelijkingen van Einstein in vacuüm, is $R=0$, wat betekent dat de totale ruimte-tijdkromming nul is buiten een massieve bron.

Wanneer de eerdere formule vermenigvuldigd wordt met $g^{\mu\nu}$ dan krijgen we:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 0 \\ g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R &= 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2} (4) R = 0 \end{aligned}$$

Dit kan alleen maar waar zijn als $R=0$ en dus $R_{\mu\nu} = 0$.

Dus ten gevolge van de relatie tussen R en $R_{\mu\nu}$, is het duidelijk dat:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

dus wordt de vacuümvergelijking:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

6.1.4 Berekeningen en numerieke verificatie

Op basis van de algemene vorm van de Ricci-tensor en de Christoffel-symbolen hebben we zowel numeriek (met behulp van een computerprogramma) als theoretisch aangetoond dat de Schwarzschild-metrick inderdaad voldoet aan de vacuümvergelijking $R_{\mu\nu} = 0$

De relevante expressies voor de Ricci-componenten in termen van Christoffel-symbolen zijn:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 \\ R_{11} &= -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\ R_{22} &= \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\ R_{33} &= +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen zijn geëvalueerd door de Christoffel-symbolen af te leiden uit de Schwarzschild-metrick en in te vullen in bovenstaande expressies. Deze symbolen zijn samengevat in Tabel 1 (zie [Appendix 1.2](#))

Let op: In de literatuur wordt de Christoffel-formule soms gegeven met een minteken ($-\frac{1}{2}$) of een plusteken ($+\frac{1}{2}$) voor de leidende factor. In onze benadering is gewerkt met een positieve factor van $\frac{1}{2}$. Deze conventie bleek consistent met het resultaat dat alle relevante Ricci-componenten nul zijn:

$$R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$$

wat vereist is volgens de veldvergelijkingen van Einstein in vacuüm. Daarom is de Christoffel-formule in het volgende vorm toegepast:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

6.1.5 Conclusie

Door zowel analytische als numerieke evaluatie van de Ricci-tensorcomponenten, op basis van de Schwarzschild-metrik en bijbehorende Christoffel-symbolen, is aangetoond dat deze oplossing inderdaad voldoet aan de Einstein-veldvergelijkingen in vacuüm. Daarmee is de Schwarzschild-oplossing een exacte en fysisch consistente beschrijving van de ruimte-tijdstructuur buiten een sferisch symmetrische massa.

6.2 Controle van R_{00} , R_{11} , R_{22} en R_{33} in de Schwarzschild-Metrik

Bij het controleren van de Einstein-veldvergelijkingen in vacuüm, moeten de componenten van de Ricci-tensor - met name R_{00} , R_{11} , R_{22} en R_{33} - worden geëvalueerd in het kader van de Schwarzschild-oplossing. Dit gebeurt in sferische coördinaten (t, r, θ, ϕ) .

De Schwarzschild-metrik luidt:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Met

$$\sigma^2 = 1 - \frac{R_s}{r}$$

Waar $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ de Schwarzschild-radius is.

Om de componenten van de Ricci-tensor te bepalen, doorlopen we de volgende stappen:

1. **Afleiden van de Christoffel-symbolen** uit de Schwarzschild-metrik in sferische coördinaten;
2. **Substitutie van deze symbolen in de uitdrukkingen voor de Ricci-tensorcomponenten**;
3. **Controle** dat alle relevante componenten $R_{\mu\nu}$ gelijk zijn aan nul, conform de Einstein-veldvergelijkingen in vacuüm.

De gebruikte Christoffel-symbolen en hun afgeleiden zijn te vinden in [Appendix 1.2](#). Hieronder volgen de afzonderlijke controles.

Controle van R_{00}

De component R_{00} wordt gegeven door:

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1$$

Na substitutie van de betreffende termen volgt:

$$R_{00} = \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{1}{r} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{1}{r} - \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2}$$

$$R_{00} = \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} - \frac{R_s^2}{2r^4} + \frac{2R_s(r - R_s)}{2r^4} = \frac{3R_s^2 - 2rR_s - R_s^2 + 2R_sr - 2R_s^2}{2r^4} = 0$$

Dus:

$$R_{00} = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Controle van R_{11}

De component R_{11} wordt berekend uit:

$$R_{11} = -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

Na uitwerking:

$$R_{11} = -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} - \frac{-1}{r^2} - \frac{-1}{r^2} + \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} + \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{1}{r} + \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{1}{r} - \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} - \frac{1}{r} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{1}{r}$$

$$R_{11} = -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{R_s^2}{4r^4 \sigma^4} - \frac{R_s}{2r^3 \sigma^2} - \frac{R_s}{2r^3 \sigma^2} - \frac{R_s^2}{4r^4 \sigma^4} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}$$

$$R_{11} = -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} - \frac{R_s^2}{2r^4 \sigma^4} - \frac{2R_sr(1 - \frac{R_s}{r})}{2r^4 \sigma^4} = -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} - \frac{R_s^2}{2r^4 \sigma^4} - \frac{2R_sr - 2R_s^2}{2r^4 \sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-R_s^2 + 2rR_s}{2r^4 \sigma^4} + \frac{-R_s^2}{2r^4 \sigma^4} + \frac{-2R_sr + 2R_s^2}{2r^4 \sigma^4} = 0$$

Dus:

$$R_{11} = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Controle van R_{22}

Voor de component R_{22} geldt:

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$$

Invulling geeft:

$$R_{22} = -1 + 1 - r\sigma^2 \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} + r\sigma^2 \frac{+R_s}{2r^2 \sigma^2} - r\sigma^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} r\sigma^2 - 0 = 0$$

Dus:

$$R_{22} = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Controle van R_{33}

De component R_{33} wordt als volgt berekend:

$$R_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

Uitwerking leidt tot:

$$R_{33} = -1 + 1 - r\sigma^2 \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} + r\sigma^2 \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} - r\sigma^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r}r\sigma^2 - 0 = 0$$

Dus:

$$R_{33} = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Conclusie

Alle relevante componenten van de Ricci-tensor zijn nul:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{voor } \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\},$$

wat bevestigt dat de Schwarzschild-oplossing voldoet aan de Einstein-veldvergelijkingen in vacuüm. Hiermee is aangetoond dat deze oplossing de ruimte-tijd correct beschrijft buiten een sferisch symmetrische massa in afwezigheid van energie of materie. Dit vormt een fundamentele bevestiging van zowel de consistentie van de Schwarzschild-oplossing als de juistheid van de algemene relativiteitstheorie in dit specifieke geval.

6.3 Controle van de Ricci-Tensorcomponenten R_{00} , R_{11} , R_{22} en R_{33} in Schwarzschild-Coördinaten

We controleren expliciet de componenten van de Ricci-tensor voor de Schwarzschild-oplossing in een aangepast coördinatenstelsel $(t_\infty, x_1, x_2, x_3)$, waarbij de metriek de vorm heeft:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt_\infty^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - \frac{r^2 dx_2^2}{\sin^2 \theta} - r^2 \sin^2 \theta dx_3^2$$

Waarbij $\sigma^2 = 1 - \frac{R_s}{r}$, met R_s de Schwarzschildstraal.

De benodigde Christoffel-symbolen en hun afgeleiden zijn gegeven in [Appendix 1.3](#). Hieronder verifiëren we dat alle componenten van de Ricci-tensor nul zijn, zoals vereist voor een vacuümplossing ($R_{\mu\nu} = 0$).

Component R_{00}

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1$$

Ingevuld met uitdrukkingen voor de Christoffel-symbolen:

$$R_{00} = \frac{R_s^2}{2r^4} + \frac{R_s \sigma^2}{2} \frac{3R_s - 4r}{2r^4 \sigma^2} + \frac{R_s \sigma^2}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{R_s \sigma^2}{2} \frac{1}{r^3} - \frac{R_s}{2r^4 \sigma^2} \frac{R_s \sigma^2}{2}$$

$$R_{00} = \frac{2R_s^2}{4r^4} + \frac{3R_s^2 - 4rR_s}{4r^4} + \frac{4R_sr\sigma^2}{4r^4} - \frac{R_s^2}{4r^4}$$

$$R_{00} = \frac{2R_s^2 + 3R_s^2 - 4rR_s - R_s^2}{4r^4} + \frac{4R_s(r - R_s)}{4r^4} = \frac{2R_s^2 + 3R_s^2 - 4rR_s - R_s^2}{4r^4} + \frac{4R_sr - 4R_s^2}{4r^4}$$

$$R_{00} = \frac{4R_s^2 - 4rR_s}{4r^4} + \frac{4R_sr - 4R_s^2}{4r^4} = 0$$

Resultaat:

$$R_{00} = 0 \text{ q.e.d.}$$

Component R_{11}

$$R_{11} = -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

Invulling geeft:

$$R_{11} = -\frac{R_s(3R_s - 4r)}{2r^8\sigma^4} - \frac{-3}{r^6} - \frac{-3}{r^6} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{1}{r^3} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{1}{r^3} - \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} - \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3}$$

$$-\frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3}$$

Na vereenvoudiging:

$$R_{11} = -\frac{2R_s(3R_s - 4r)}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} + \frac{R_s(3R_s - 4r)}{4r^8\sigma^4} + \frac{4(3R_s - 4r)r(1 - \frac{R_s}{r})}{4r^8\sigma^4} - \frac{R_s^2}{4r^8\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-6R_s^2 + 8rR_s + 3R_s^2 - 4rR_s + 12R_sr - 16r^2 - 12R_s^2 + 16rR_s - R_s^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6}$$

$$R_{11} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{16r^2(1 - \frac{R_s}{r})^2}{4r^8\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{16r^2(1 - 2\frac{R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2})}{4r^8\sigma^4} =$$

$$R_{11} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{16r^2 - 32rR_s + 16R_s^2}{4r^8\sigma^4} = 0$$

Resultaat:

$$R_{11} = 0 \text{ q.e.d.}$$

Component R_{22}

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$$

Invulling en vereenvoudiging geeft:

$$\begin{aligned}
R_{22} &= -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - r^3 \sigma^2 \frac{R_s}{2r^4 \sigma^2} - r^3 \sigma^2 \frac{3R_s - 4r}{2r^4 \sigma^2} - r^3 \sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3 \sigma^2 - 0 \\
R_{22} &= -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} - r^3 \sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3 \sigma^2 - 0 \\
R_{22} &= \frac{-4r}{2r} + \frac{4R_s}{2r} - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} = 0
\end{aligned}$$

Resultaat:

$$R_{22} = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Component R_{33}

$$\begin{aligned}
R_{33} &= +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
R_{33} &= -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - r^3 \sigma^2 \frac{R_s}{2r^4 \sigma^2} - r^3 \sigma^2 \frac{3R_s - 4r}{2r^4 \sigma^2} - r^3 \sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3 \sigma^2 - 0 \\
R_{33} &= -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} - r^3 \sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3 \sigma^2 - 0 \\
R_{33} &= \frac{-4r}{2r} + \frac{4R_s}{2r} - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} = 0
\end{aligned}$$

Resultaat:

$$R_{33} = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Conclusie

De vier onafhankelijke componenten van de Ricci-tensor zijn allen nul in Schwarzschild-coördinaten, conform de verwachting voor de vacuümoplossing van de Einstein-veldvergelijkingen:

$$R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$$

Dit bevestigt dat de Schwarzschild-metrick inderdaad een oplossing is van $R_{\mu\nu} = 0$ buiten de centrale massa.

6.4 Controle van de Schwarzschild-Oplossing met behulp van een gesimplificeerde vorm van de veldvergelijkingen

In dit hoofdstuk controleren we de Schwarzschild-oplossing aan de hand van een vereenvoudigde versie van de Einstein-veldvergelijkingen. Deze gelimiteerde vorm is afkomstig uit Schwarzschild's oorspronkelijke afleiding en geldt uitsluitend wanneer het spoor ("trace") van de metrische tensor voldoet aan:

$$\text{tr}(g_{\mu\nu}) = -1$$

De veldvergelijkingen nemen in deze benadering de vorm aan:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}$$

In deze uitdrukking worden de **Christoffel-symbolen** gedefinieerd met een negatief teken, zoals Schwarzschild dat deed:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = -\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

Door deze negatieve conventie zullen alle afgeleide uitdrukkingen, waaronder de afleidingen van de Ricci-tensor, van teken verschillen ten opzichte van de standaarddefinitie.

Schwarzschild gebruikte in zijn afleiding de coördinaten (t, x, y, z) . We beginnen dan ook met deze coördinaten en geven de relevante componenten van de Ricci-tensor weer, zoals ze volgen uit de gelimiteerde formule.

Afgeleide componenten van de Ricci-tensor

De volgende expressies gelden in Schwarzschild's notatie:

1.11. Voor de R_{00} -component:

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

1.12. Voor de R_{11} -component:

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

• Voor de R_{22} -component:

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{22,2}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

1.13. Voor de R_{33} -component:

$$R_{33} = \Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

Deze componenten kunnen eenvoudig worden ingevuld zodra de juiste Christoffel-symbolen zijn berekend uit de Schwarzschild-metrik. In de volgende sectie evalueren we deze componenten expliciet.

Eerst:

6.5 t, x, y, z Coördinaten

We werken in aangepaste cartesisch coördinaten (t, x, y, z) , waarin Schwarzschild zijn oplossing oorspronkelijk formuleerde. We controleren expliciet dat de componenten van de Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$ nul zijn

Berekening van R_{00}

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

Met de gegeven waarden:

$$R_{00} = \frac{-R_s^2}{2r^4} + \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s\sigma^2}{2} + \frac{R_s\sigma^2}{2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} = \frac{-R_s^2}{2r^4} + \frac{R_s^2}{2r^4} = 0$$

Resultaat:

$$R_{00} = 0, \text{ q.e.d.}$$

Berekening van R_{11}

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

Door alle termen zorgvuldig te substitueren en vereenvoudigen, vinden we:

$$R_{11} = \frac{-6}{r^6\sigma^4} + \frac{10R_s}{r^7\sigma^4} - \frac{4.5R_s^2}{r^8\sigma^4} + \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} + \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3}$$

$$R_{11} = \frac{-6}{r^6\sigma^4} + \frac{10R_s}{r^7\sigma^4} - \frac{4.5R_s^2}{r^8\sigma^4} + \frac{R_s^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{9R_s^2 + 16r^2 - 24rR_s}{4r^8\sigma^4} + \frac{2}{r^6}$$

$$R_{11} = \frac{-24r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{40rR_s}{4r^8\sigma^4} - \frac{18R_s^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{R_s^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{9R_s^2 + 16r^2 - 24rR_s}{4r^8\sigma^4} + \frac{2}{r^6}$$

$$R_{11} = \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8\sigma^4} + \frac{2}{r^6}$$

$$R_{11} = \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8\sigma^4} + \frac{8r^2\sigma^4}{4r^8\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8\sigma^4} + \frac{8r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2}{4r^8\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8\sigma^4} + \frac{8(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{4r^8\sigma^4} = 0$$

Resultaat:

$$R_{11} = 0 \text{ q.e.d.}$$

Berekening van R_{22}

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{22,2}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

Na vereenvoudiging van de trigonometrische en radiale termen:

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{-2R_s + 3r}{r \sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-r^3 \sigma^2}{\sin^2 \theta} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{-r^3 \sigma^2}{\sin^2 \theta} + \frac{-\cos(\theta) - \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} + \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \\ R_{22} &= \frac{-2R_s + 3r}{r \sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-2r^3 \sigma^2}{r^3 \sin^2 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \\ R_{22} &= \frac{-2R_s + 3r}{r \sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-2(r - R_s)}{r \sin^2 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \\ R_{22} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \\ R_{22} &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = 0 \end{aligned}$$

Resultaat:

$$R_{22} = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Berekening van R_{33}

$$R_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

Na het combineren van termen met de hoekafhankelijke factoren:

$$\begin{aligned} R_{33} &= \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - r^3 \sigma^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r^3} + (-\sin^2 \theta \cos \theta) \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \\ &\quad - \frac{1}{r^3} r^3 \sigma^2 \sin^2 \theta + \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} (-\sin^2 \theta \cos \theta) \\ R_{33} &= \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - 2\sigma^2 \sin^2 \theta - 2\sin^2(\theta) \cos \theta \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \\ R_{33} &= \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - 2\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta \\ R_{33} &= \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 + \left(-2 + \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta \\ R_{33} &= \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - 2\cos^2 \theta \\ R_{33} &= \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta - 2\cos^2 \theta = 0 \end{aligned}$$

Resultaat:

$$R_{33} = 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Conclusie

We hebben aangetoond dat de componenten R_{00} , R_{11} , R_{22} en R_{33} van de Ricci-tensor allen nul zijn binnen de Schwarzschild-geometrie, wanneer we gebruik maken van de gesimplificeerde veldvergelijking met $\text{tr}(g_{\mu\nu}) = -1$. Dit bevestigt dat de Schwarzschild-oplossing inderdaad een vacuümplossing is van de Einstein-veldvergelijkingen, zelfs onder deze specifieke afleidingsmethode.

6.6 Controle van de Ricci-Componenten in Sferische Coördinaten

We controleren of de Schwarzschild-oplossing in sferische coördinaten voldoet aan de *beperkte* Einstein-veldvergelijkingen, waarin geldt dat de determinant van de metriek $g = -1$.

De Schwarzschild-metriek in sferische coördinaten is:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad \text{met } \sigma^2 = 1 - \frac{R_s}{r}$$

We evalueren hieronder de componenten van de Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$ afzonderlijk.

Component R_{00}

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

Na substitutie en vereenvoudiging:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} + \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \\ R_{00} &= \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} + \frac{R_s^2}{2r^4} = \\ R_{00} &= \frac{R_s(4R_s - 2r)}{2r^4} = \frac{2R_s(2R_s - r)}{r^4} \end{aligned}$$

Conclusie:

$$R_{00} \neq 0$$

Component R_{11}

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

Uitwerking leidt tot:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{R_s(2r - R_s)}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} + \frac{-R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{-R_s}{2r^2\sigma^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{1}{r} \\ R_{11} &= \frac{R_s(2r - R_s)}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{2}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{R_s(2r - R_s)}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{4(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{2r^4\sigma^4} \\
R_{11} &= \frac{2rR_s - R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{4(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{2r^4\sigma^4} \\
R_{11} &= \frac{2rR_s - R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{4(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{2r^4\sigma^4} \\
R_{11} &= \frac{2rR_s - R_s^2 + 4r^2 + 4R_s^2 - 8rR_s}{2r^4\sigma^4} \\
R_{11} &= \frac{-6rR_s + 2R_s^2 + 4r^2}{2r^4\sigma^4} = \frac{R_s^2 + 2r^2 - 3rR_s}{r^4\sigma^4}
\end{aligned}$$

Verdere vereenvoudiging door elimineren van σ^4 :

$$R_{11} = \frac{R_s^2 + 2r^2 - 3rR_s}{r^2(R_s^2 + r^2 - 2rR_s)}$$

Conclusie:

$$R_{11} \neq 0$$

Component R_{22}

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{22,2}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

Evaluatie van deze termen geeft:

$$\begin{aligned}
R_{22} &= 1 + 0 + (-r\sigma^2) \frac{1}{r} + \frac{1}{r} (-r\sigma^2) + 0 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
R_{22} &= 1 - 2\sigma^2 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 2\sigma^2 \\
R_{22} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} - 2\sigma^2
\end{aligned}$$

Conclusie:

$$R_{22} \neq 0$$

Component R_{33}

$$R_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - r\sigma^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r} - \cos \theta \sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{r} (-r\sigma^2 \sin^2 \theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (-\cos \theta \sin \theta) \\
R_{33} &= 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\sigma^2 \sin^2 \theta - 2\cos \theta \sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
R_{33} &= 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\sigma^2 \sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta \\
R_{33} &= 1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\sigma^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

$$R_{33} = -2\sigma^2 \sin^2 \theta$$

Conclusie:

$$R_{33} \neq 0$$

Interpretatie van het resultaat

We zien dat alle componenten $R_{\mu\nu} \neq 0$ zijn bij gebruik van de *beperkte* Einstein-veldvergelijkingen. Dus, de Schwarzschild-formule met sferische coördinaten voldoet niet aan deze *beperkte* formule. Dit is niet verrassend, aangezien de determinant van g voor de sferische coördinaten niet -1 is, wat een vereiste is om de beperkte formule te gebruiken. Voor de Schwarzschild-metrisch in sferische coördinaten geldt:

$$g = -\sigma^2 \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot r^2 \cdot r^2 \sin^2 \theta = -r^4 \sin^2 \theta \neq -1$$

Echter, voor wat betreft de volledige formule voor de Einstein-veldvergelijkingen, is de sferische coördinaatvergelijking van Schwarzschild in overeenstemming, zoals hierboven werd aangetoond.

Opmerking

De beperkte formule was het resultaat van de extra voorwaarde die Einstein toevoegde, namelijk dat het product van de elementen van het spoor van de metrische tensor $g=-1$ moet zijn ($g = g_{00} \cdot g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33} = -1$). Deze extra voorwaarde werd door Einstein ingevoerd om de berekeningen eenvoudiger te maken en zijn algemene formule te vereenvoudigen. Echter, de beperkte formule is een beperking die een aantal mogelijke oplossingen negeert. Daarom is het toepassen van de algemene formule naar mijn mening de beste benadering. Dit wordt ook ondersteund door het feit dat de praktische Schwarzschild-vergelijking:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

een g heeft die ongelijk is aan -1 en dus niet voldoet aan de beperkte Einstein-formule, maar wel aan de algemene formule. Met deze formule kunnen allerlei praktische problemen in de algemene relativiteitstheorie, zoals de buiging van licht, de baan van Mercurius, Shapiro-tijdvertraging, enzovoort, worden opgelost. Ook is inmiddels door diverse metingen aangetoond dat de berekeningen overeenstemmen met de meetresultaten. Kortom de oplossing van Schwarzschild toont aan dat de algemene formule van de algemene relativiteitstheorie:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

de voorkeur heeft boven de beperkte formule.

De algemene Einstein-veldvergelijkingen vormen de juiste basis van de relativistische zwaartekrachtstheorie. De beperkte formule is slechts een specialisatie onder restrictieve voorwaarden.

Deel VII – Vragen en Discussie

7 Antwoorden op Vragen

7.1 Afleiding van de Schwarzschild-Formule naar de eigen tijd τ

Vraag:

Wat ik moeilijk te accepteren vind in de algemene relativiteitstheorie is de afleiding naar " ds ". Het lijn-element is niets anders dan de lichtsnelheid, vermenigvuldigd met het lokaal gemeten tijdsverschil " dt_0 " ($ds = c \cdot dt_0$). Ik kan dt/ds (verschil in kloktijden) begrijpen, maar wat betekent dx/ds ?

Antwoord:

De verwarring ontstaat door de interpretatie van ds . In de algemene relativiteitstheorie geldt:

$$ds = c d\tau$$

waarbij τ de **eigentijd** is: de tijd die gemeten wordt door een klok die zich in rust bevindt ten opzichte van het object dat gemeten wordt - met andere woorden, de tijd op een klok die "meebeweegt" met het object zelf.

De grootte dt daarentegen is de coördinaattijd in een universeel (of extern) referentiestelsel, bijvoorbeeld het centrum van een zwaartekrachtsveld (zoals het middelpunt van de aarde). Deze tijd t is dus geen direct gemeten tijd, maar een rekenkundige parameter die via de metrieek kan worden afgeleid uit $d\tau$.

De relatie tussen beide is:

$$d\tau = \frac{\sigma}{\gamma} dt$$

Hierin zijn:

- $\sigma = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$ de gravitationele factor (afgeleid uit de Schwarzschild-oplossing),
- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ de Lorentzfactor,
- $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ de Schwarzschildstraal.

Afleiding uit de Schwarzschild-metrieek

We beschouwen het tijdsinterval op basis van de algemene vorm van het metrisch tensor-product in een stilstaand, sferisch symmetrisch veld:

$$c^2 d\tau^2 = Ac^2 dt^2 - Bdx^2 - Ddy^2 - Edz^2$$

waarbij A, B, D, E de componenten van de metrische tensor zijn, afhankelijk van de positie in de ruimte (bijvoorbeeld van r).

Deel beide zijden door $c^2 d\tau^2$:

$$1 = A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{B}{c^2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \frac{D}{c^2} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 - \frac{E}{c^2} \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2$$

We herschrijven de ruimtelijke afgeleiden via de kettingregel:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}, \quad \text{enz.}$$

Hiermee wordt de vergelijking:

$$1 = A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{B}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{D}{c^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{E}{c^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Hierbij zijn dus x, y en z gedeeld door t in hun eigen frame en blijken snelheden te zijn in dat frame.

$$1 = A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{B}{Ac^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{D}{Ac^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{E}{Ac^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\}$$

$$v^2 = \frac{B}{A} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{D}{A} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{E}{A} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

Vul nu v in, in vorige vergelijking:

$$1 = A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{A}{\gamma^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Hieruit volgt:

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{\gamma^2}{A} \Rightarrow d\tau^2 = \frac{A}{\gamma^2} dt^2 = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} dt^2$$

Of:

$$d\tau = \frac{\sigma}{\gamma} dt$$

Dit is de relatie tussen de tijd van de meetklok en de tijd op de oorsprong van het universele frame.

Conclusie

Deze afleiding toont de relatie aan tussen de eigentijd τ (zoals gemeten door een bewegende klok in zijn eigen ruststelsel) en de coördinaattijd t (zoals gedefinieerd in het globale zwaartekrachtsveld). De rol van dx/ds wordt hierdoor ook duidelijk: het beschrijft de snelheid van ruimtelijke verandering per eenheid eigentijd - dus de projectie van de vier-snelheid op de ruimtelijke coördinaten.

Deze relatie is fundamenteel binnen de algemene relativiteitstheorie en vormt de basis voor het analyseren van tijdsdilataties in zwaartekrachtsvelden, zoals in het Hafele-Keating-experiment en andere toepassingen van de Schwarzschild-metrieek.

7.2 Toelichting op de Transformatieformule van Einstein

In de algemene relativiteitstheorie is het fundamenteel dat fysische wetten invariant blijven onder coördinatentransformaties. De relatie tussen oude en nieuwe coördinatenstelsels wordt wiskundig uitgedrukt met behulp van een transformatieformule, gebaseerd op partiële afgeleiden.

1. Coördinatenstelsels

De formule staat voor de covariante transformatie tussen twee coördinatenstelsels. Het oude stelsel wordt aangeduid met x_β , dus met coördinaatassen x_0, x_1, x_2, x_3 . Het nieuwe stelsel x'_α , met x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 .

2. Transformatieformule

De differentiaal van de nieuwe coördinaten dx'_α drukken we uit in termen van de differentiaal van de oude coördinaten dx_β als volgt:

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} dx_\beta$$

Deze formule is geschreven volgens de Einstein-notatie, wat betekent dat er een sommatie over β is. Dit betekent dus eigenlijk:

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x_0}{\partial x'_\alpha} dx_0 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_\alpha} dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_\alpha} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_\alpha} dx_3$$

Voor elke waarde van α (0 tot 3) geeft dit een afzonderlijke vergelijking die elk van de nieuwe coördinatendifferentiëlen $dx'_0, dx'_1, dx'_2, dx'_3$ uitdrukt in termen van de oude coördinaten.

3. Tensorvorm

In total krijgen we dan:

$$\begin{aligned} dx'_0 &= \frac{\partial x_0}{\partial x'_0} dx_0 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_0} dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_0} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_0} dx_3 \\ dx'_1 &= \frac{\partial x_0}{\partial x'_1} dx_0 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} dx_3 \\ dx'_2 &= \frac{\partial x_0}{\partial x'_2} dx_0 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} dx_3 \\ dx'_3 &= \frac{\partial x_0}{\partial x'_3} dx_0 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_3} dx_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_3} dx_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} dx_3 \end{aligned}$$

Dit kan ook worden weergegeven als een tensor (matrixvorm):

$$\begin{pmatrix} dx'_0 \\ dx'_1 \\ dx'_2 \\ dx'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x'_0} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_0} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_0} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_0} \\ \frac{\partial x_0}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial x_0}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Deze matrix stelt de **Jacobiaan van de coördinatentransformatie** voor, en beschrijft hoe vectorcomponenten transformeren tussen twee stelsels.

4. Interpretatie

Deze formule laat zien hoe een vector (of differentiaal) in het ene stelsel kan worden uitgedrukt in het andere stelsel. Belangrijk hierbij is:

- De **transformatiefactoren** $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta}$ geven aan hoe de oude coördinaten veranderen met respect tot de nieuwe.
- In tensoranalyse spreken we van een **covariante transformatie** als de indices zich rechts onder bevinden (zoals ∂x_β) en **contravariante transformatie** als de indices boven staan (zoals dx^β).

5. Voorbeeld: Transformatie binnen Schwarzschild-metriek

Een praktische toepassing is de overgang van bolcoördinaten (t, r, θ, φ) naar cartesische coördinaten (t, x, y, z) . Hierbij worden de ruimtelijke coördinaten getransformeerd via:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

De bijbehorende differentiaaltransformaties voor dx , dy , dz kunnen dan worden afgeleid met behulp van de kettingregel, zoals hierboven geformaliseerd.

7.3 Antwoord op vragen betreffende Schwarzschild

Vraag 1:

Waar komt de algemene relativiteitsformule met de Ricci-tensor vandaan, die pas na 1916 algemeen gebruikt werd?

Antwoord:

De volledige veldvergelijkingen van de algemene relativiteitstheorie, inclusief de Ricci-tensor, maakten vanaf het begin deel uit van Einsteins theorie. De vereenvoudigde versie met de voorwaarde $g=-1$ werd later gebruikt om de vergelijkingen wiskundig eenvoudiger te maken, maar deze beperking verkleint het aantal mogelijke oplossingen.

In veel literatuur wordt de tensor $G_{\mu\nu}$ de **Einstein-tensor** genoemd. Einstein zelf presenteerde deze tensor als:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Hierin is:

- $R_{\mu\nu}$: de **Ricci-tensor**,
- R : de **Ricci-scalar**, ofwel het spoor van de Ricci-tensor,
- $g_{\mu\nu}$: de **metrische tensor** van de ruimte-tijd.

De Ricci-scalar is gegeven door:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

Contractie van de Einstein-veldvergelijkingen met $g^{\mu\nu}$ levert:

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = R - \frac{1}{2} 4R = -R$$

De **volledige Einstein-veldvergelijkingen** luiden:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Waarbij:

- $R_{\mu\nu}$: de Ricci tensor,
- $g_{\mu\nu}$: de metrische tensor,
- G de gravitatieconstante,
- $T_{\mu\nu}$: de energie-impuls-tensor,
- c : de lichtsnelheid.

Buiten een massieve bol bevindt zich geen materie of energie. In dat geval is $T_{\mu\nu} = 0$, en vereenvoudigen de veldvergelijkingen zich tot:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

We weten dat:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} 4 R_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu}$$

Waaruit volgt:

$$G_{\mu\nu} = 0 \text{ alleen als } R_{\mu\nu} = 0 \text{ en dus ook } R = 0$$

Achtergrond: van Riemann tot Ricci

Einstein bouwde voort op het werk van Riemann, die reeds een wiskundige beschrijving van gekromde oppervlakken had ontwikkeld. De **Riemann-tensor**:

$$R_{\mu\beta\rho\nu}$$

Dit is een tensor van rang vier en moeilijk te visualiseren. Omdat de massa-energie-impulstensor $T_{\mu\nu}$ slechts twee indices heeft, moet de Riemann-tensor worden omgezet van vier naar twee indices.

Met behulp van de metrische tensor kan de covariante Riemann-tensor worden omgezet in een gedeeltelijk contravariante vorm:

$$R^{\beta}{}_{\mu\rho\nu} = g^{\beta\alpha} R_{\alpha\mu\rho\nu}$$

Dit is nodig om de gewenste contractie uit te voeren. Door $\beta = \rho$ te stellen, kan de contractie worden uitgevoerd met als resultaat de Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$.

$$R^{\beta}{}_{\mu\beta\nu} = R_{\mu\nu}$$

Hierbij is de Ricci-tensor dus het **spoor** van de Riemann-tensor.

De rol van Christoffel-symbolen

De Ricci-tensor kan ook worden uitgedrukt in termen van de **Christoffel-symbolen**:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu}$$

waarbij het Christoffel-symbool zelf luidt:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

De afgeleide van Christoffel-symbool wordt dan:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\gamma}} = -g^{\rho\alpha} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \cdot \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \right\}$$

Bij het berekenen van de Ricci-elementen $R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33}$ met de volledige Einsteinveldvergelijkingen blijkt dat dezen allemaal nul zijn, wat correct is. Maar wanneer we de berekening doen met de beperkte formule van de veldvergelijkingen ($g=-1$) is het resultaat niet correct. Dus de Schwarzschild vergelijking voldoet wel aan de algemene veldvergelijkingen maar niet aan de beperkte. Dit klopt omdat bij de Schwarzschildvergelijking $g \neq -1$.

Over de Schwarzschild-oplossing en de beperking $g=-1$

Schwarzschild gebruikt de welbekende sferische vergelijking. De determinant van de metrische tensor (hier het product van de coëfficiënten) is niet -1. Deze sferische vergelijking voldoet aan de Einstein-veldvergelijkingen, maar niet aan de beperkte versie van deze vergelijkingen, omdat bij de laatste $g=-1$ vereist is. Schwarzschild heeft een transformatie afgeleid, gebaseerd op aangepaste sferische coördinaten, waarbij hij de transformatie zodanig heeft gekozen dat $g=-1$ wordt gehaald. In dat geval voldoet de vergelijking ook aan de beperkte Einstein-veldvergelijkingen.

Conclusie

Hoewel Schwarzschild probeerde te voldoen aan Einstein's wens om de metrische spoor $g=-1$ te hebben, is mijns inziens de enige relevante vraag dat de Einstein-veldvergelijkingen, waarbij $T_{\mu\nu} = 0$, en dus $R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$, worden nageleefd, ongeacht of $g = -1$ of $g \neq -1$. Dus, de eis van $g = -1$ is een onnodige beperking.

Vraag 2:

De consequentie van het verschil in formules is groot. In jouw document tel ik negen Christoffel-symbolen, terwijl Karl Schwarzschild er tien vond. Bij jou lijkt de 222 (Γ_{22}^2) afwezig te zijn. Dit komt omdat jouw definitie van de metrische tensor g verschilt van die van Schwarzschild; g_{22} en g_{33} zijn -1 voor Schwarzschild, terwijl jij de coördinaat r toevoegt (bijvoorbeeld $g_{22} = -r^2$). Ook Droste (1917), Eddington (1921), MWT (1975) en OAS (2007) hielden zich aan $g=-1$ voor de Schwarzschild-oplossing, zodat: $g_{22} = g_{33} = -1$. Dit roept de vraag bij mij op: denk je dat $g=-1$ vereist is voor de Schwarzschild-oplossing?

Antwoord:

In de oorspronkelijke afleiding van Schwarzschild werd gestart vanuit het Cartesiaanse coördinatenstelsel (x, y, z). De metriek in die vorm heeft de volgende componenten:

$$g_{00} = \sigma^2 \quad g_{11} = -\frac{1}{r^4 \sigma^2} \quad g_{22} = -\frac{r^2}{\sin^2 \theta} \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

In dit geval worden tien (of veertien) relevante Christoffel-symbolen gecreëerd. Ook zie je in mijn overzicht van formules dat ik formules heb afgeleid voor zowel de bolvormige als de Cartesiaanse x, y, z vorm. In de x, y, z vorm bestaat 222 (Γ_{22}^2).

Voor de bolvormige vorm is dit echter anders; daar zijn de elementen van de metrische tensor:

$$g_{00} = \sigma^2 \quad g_{11} = \frac{-1}{\sigma^2} \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Dit is exact dezelfde vorm als bij Schwarzschild. In deze bolcoördinaten zijn g_{22} en g_{33} expliciet afhankelijk van r en θ , en kunnen dus niet constant zijn, zoals bij $g_{22} = g_{33} = -1$. Als deze waarden constant zouden zijn, zouden de partiële afgeleiden $\frac{\partial g_{22}}{\partial r}$, $\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial g_{33}}{\partial r}$, en $\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta}$ allemaal nul zijn. Hierdoor zouden veel Christoffel-symbolen, waaronder cruciale zoals Γ_{22}^1 en Γ_{22}^2 , eveneens verdwijnen.

Dit geldt ook voor Schwarzschild! De elementen g_{22} en g_{33} kunnen niet -1 zijn omdat in dat geval

$\frac{\partial g_{22}}{\partial r}$, $\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial g_{33}}{\partial r}$, $\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta}$ nul zouden zijn en het aantal Christoffel-symbolen beperkt zou zijn tot 001 (en 010), 100 en 111.

Wat betreft Γ_{22}^2 :

Voor bolcoördinaten is deze component inderdaad nul, omdat g_{22} niet afhankelijk is van θ en de afgeleide dus nul is:

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \right) = 0$$

Belangrijk is wel dat bij evaluatie van componenten op een specifieke waarde zoals $\theta = \frac{\pi}{2}$, (oftewel 90°) pas aan het **einde** van de berekeningen mag worden gesubstitueerd.

Bijvoorbeeld:

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = -\cos \theta \sin \theta = 0 \quad \text{wanneer } \theta = 90^\circ$$

Deze waarde wordt nul als $\theta = \frac{\pi}{2}$, maar voor het Ricci-element is ook de **afgeleide** van dit Christoffel-symbool ten opzichte van θ nodig en die is:

$$\frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial \theta} = -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{wanneer } \theta = 90^\circ$$

En die is dus **niet nul**, wat cruciaal is voor het berekenen van bijvoorbeeld het Ricci-tensorcomponent R_{22} .

Wat betreft de voorwaarde $\det(g) = -1$:

Waarom Einstein deze restrictie introduceerde is niet volledig duidelijk, maar het maakt de algebra in veel gevallen eenvoudiger en zorgt voor symmetrie. Maar naar mijn mening leidt dit tot een onnodige beperking. Het hangt ook af van welk type coördinatenstelsel wordt gekozen. Bijvoorbeeld, het element van de metrische tensor van t, x, y, z levert inderdaad een $\det(g)$ van -1 op:

$$\sigma^2 \cdot \left(-\frac{1}{r^4 \sigma^2} \right) \cdot \left(-\frac{r^2}{\sin^2 \theta} \right) \cdot (-r^2 \sin^2 \theta) = -1$$

Maar met bolcoördinaten is het:

$$\sigma^2 \cdot \frac{-1}{\sigma^2} \cdot (-r^2) \cdot (-r^2 \sin^2 \theta) = -r^4 \sin^2 \theta$$

En dus is hier $\det(g) \neq -1$. Toch voldoet deze metriek perfect aan de Einstein-veldvergelijkingen in vacuüm ($T_{\mu\nu} = 0$) wat betekent dat $R_{\mu\nu} = 0$ en dus ook $R = 0$.

Conclusie:

De eis $\det(g)=-1$ is een **coördinaatafhankelijke conventie** die wiskundig gemak kan bieden, maar fysisch **niet noodzakelijk** is voor de juistheid van de Schwarzschild-oplossing. Wat werkelijk telt is dat de veldvergelijkingen worden vervuld. De keuze van Schwarzschild om een transformatie te gebruiken waarmee $\det(g)=-1$ wordt bereikt, was vooral bedoeld om aan Einsteins wensen te voldoen, maar is vanuit fysisch oogpunt overbodig.

Vraag 3:

De veldvergelijkingen in jouw document op pagina 2 en 3, gebaseerd op de Ricci-tensor, verschillen sterk van die welke wij (en Karl Schwarzschild) in bijlage E, op basis van de G-tensor, hebben gebruikt. Je hebt de G-tensor ook genoemd in jouw document op pagina 9. Mijn vraag is: zouden de resultaten niet hetzelfde moeten zijn?

Antwoord:

Onder de G-tensor, zoals je noemt in je vraag, bedoel je de beperkte veldvergelijkingen van Einstein. Zoals ik in mijn verhaal theoretisch heb laten zien voldoet Schwarzschild aan de algemene veldvergelijkingen maar niet aan de beperkte veldvergelijkingen G. Dit komt omdat Einstein de extra eis van $\det(g)=-1$ introduceerde om zo eenvoudiger formules te krijgen maar dit leidde tot onnodige beperking van mogelijke oplossingen zoals de Schwarzschild vergelijking gebaseerd op bolvormige coördinaten. Terwijl deze vergelijking een geweldige oplossing is voor het, op een redelijk eenvoudige wijze, rekenen met een verschijnsel in het vacuüm.

Vraag 4:

Ik heb nog steeds enige moeite met het begrijpen van de Schwarzschild-vergelijking en de veldvergelijkingen van Einstein. Kun je hier wat dieper op ingaan?

Antwoord:

Het lijkt erop dat we ons opnieuw begeven in een discussie die we al eerder hebben gevoerd. Laat mij vooraf duidelijk stellen: het is niet mijn bedoeling om de Schwarzschild- of Einstein-oplossing te verdedigen tegenover jouw benadering, of kritiek te leveren op jouw suggestie tot aanpassing van de Schwarzschild-metrick. Mijn streven is om tot een volledig begrip te komen. Zolang ik de Schwarzschild-oplossing niet doorgrond, blijf ik zoeken naar inzicht. Pas wanneer ik een fundamentele fout herken én begrijp, zal ik overwegen de oplossing te herzien.

Laten we daarom eerst de Schwarzschild-oplossing in detail bekijken, vóór we ons verdiepen in de Einstein-veldvergelijkingen. Ik pretendeer niet het volledige antwoord al te kennen, maar ik wil hier uiteenzetten hoe ik de structuur tot nu toe begrijp.

Het uitgangspunt van Einstein

Einstein zocht naar een beschrijving van de zwaartekracht waarin de zwaartekracht **geen kracht** meer is, zoals bij Newton, maar eerder een gevolg van de **kromming van de ruimte-tijd**. Hij wilde een coördinatenstelsel vinden waarin geen krachten voelbaar zijn, zodat een vrij vallend deeltje zich voortbeweegt zonder versnelling - in zekere zin "vrijwillig", zonder externe oorzaak.

In de klassieke mechanica beweegt een object met constante snelheid langs een rechte lijn als er geen kracht op werkt. Einstein vertaalde dit naar de relativiteitstheorie: een object zonder externe kracht beweegt langs een **geodetische lijn** in de gekromde ruimte-tijd. Deze geodeten zijn in zekere zin de “rechte lijnen” van de kromme ruimte-tijd.

Einstein zocht dus naar een wiskundige formulering die voor **elk coördinatenstelsel**, gekromd of niet, geldig is en het zwaartekrachtsveld correct beschrijft. Dit leidde tot de veldvergelijkingen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

in het vacuümgeval (buiten een massa), waarbij:

- $R_{\mu\nu}$ de **Ricci-Tensor** is, een maat voor lokale kromming,
- R de **Ricci-scalar**, het spoor van de Ricci-tensor,
- $g_{\mu\nu}$ de **metriek**, die de ruimte-tijdstructuur beschrijft.

Deze vergelijking is **covariant**: ze is geldig in elk willekeurig coördinatenstelsel.

Coördinaten, metriek en geometrie

Hoewel de veldvergelijkingen coördinatenonafhankelijk zijn, zijn de componenten van de betrokken tensors wél afhankelijk van de keuze van coördinatenstelsel. De Ricci-tensor en de scalar R worden uitgedrukt in termen van de **Christoffel-symbolen**, die zelf afgeleid zijn uit de **metriek** $g_{\mu\nu}$.

De metriek beschrijft hoe de afstand ds^2 tussen twee infinitesimaal nabije punten wordt berekend. In het eenvoudigste geval (bijvoorbeeld vlakke ruimte in Cartesische coördinaten) is dit:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Maar in gekromde ruimte-tijd hangt ds^2 af van de locatie en van de metriekcomponenten. De metriek bevat informatie over de geometrische structuur van de ruimte, inclusief mogelijke **kruistermen** (zoals $dx dy$) als de coördinaten niet orthogonaal zijn.

Ter vergelijking:

- In een rechthoekig vlakke ruimte geldt $c^2 = a^2 + b^2$ (Pythagoras).
- In een oblieke ruimte geldt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$ (cosinusregel).

In analogie hiermee beschouwt Einstein de ruimte-tijd als opgebouwd uit een oneindig aantal **infinitesimaal kleine vlakjes**, waarop de meetkunde lokaal als vlak kan worden beschouwd (via het equivalentieprincipe). In die kleine gebieden gebruiken we nog steeds een coördinatensysteem, maar de metriekcomponenten veranderen van locatie tot locatie - en coderen de kromming.

Schwarzschild's benadering

Karl Schwarzschild vond een exacte oplossing van de Einstein-vergelijkingen in vacuüm rond een bolvormige massa. Hij koos een **coördinatenstelsel** dat zoveel mogelijk symmetrie bevat:

- sferisch symmetrisch,
- statisch (tijdonafhankelijk),
- en zonder kruistermen (dus een diagonaolvormige metriek).

Dat levert de **Schwarzschild-metriek** op:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Deze formule beschrijft het kwadratische lijnsegment ds^2 als functie van vier coördinaten: (t, r, θ, ϕ) . De coëfficiënten (metriekcomponenten) hangen af van r (en impliciet via $\sin^2 \theta$ ook van θ , maar niet van t of ϕ).

Dat weerspiegelt de fysieke aannames: de oplossing is statisch (tijdonafhankelijk) en sferisch symmetrisch.

Elke locatie in de ruimte heeft zijn eigen metriekcomponenten, en dus zijn eigen meetkundige structuur. Door het integreren van ds langs een pad verkrijgen we de totale afstand of tijdsduur van het traject in deze gekromde ruimte-tijd.

Samenvatting

- De Einstein-veldvergelijkingen beschrijven hoe massa en energie de **kromming** van de ruimte-tijd bepalen.
- De Ricci-tensor en Einstein-tensor zijn meetkundige objecten die onafhankelijk zijn van het coördinatenstelsel, maar hun **componenten** veranderen bij een andere coördinatenkeuze.
- Schwarzschild koos een specifiek coördinatenstelsel en vond een exacte oplossing voor het zwaartekrachtsveld buiten een bolsymmetrische massa.
- Zijn oplossing is consistent met de Einstein-vergelijkingen en is nog steeds een van de belangrijkste oplossingen in de algemene relativiteitstheorie.

7.4 Gedetailleerde afleiding van de Einstein-Vergelijking (57) vanuit vergelijking (53)

Vraag:

Ik ben Einsteins originele GR-paper aan het lezen. Ik heb het als PDF bij deze e-mail bijgevoegd. (Einstein, Relativity: The Special and General Theory, 1916 (this revised edition: 1924)) (Einstein, The Collected Papers of Albert Einstein, 1997)

In sectie 18, onderaan pagina 186 van het artikel (onderaan links op pagina 22 van de PDF), staat een vergelijking die ik probeer af te leiden met de methode die Einstein voorstelt in het artikel (vermenigvuldiging

van vergelijking 53 met de afgeleide van de metrische tensor en gebruikmakend van de methoden in sectie 15). Zou je deze vergelijking op de specifieke manier die Einstein aangeeft kunnen afleiden, en uitsluitend gebaseerd op het voorgaande materiaal in Einsteins artikel? Kun je mij de gedetailleerde stappen laten zien die je hebt genomen om tot die vergelijking te komen volgens de methode die Einstein aangeeft?

Antwoord:

Opmerking: de vergelijkinsnummers verwijzen naar het originele werk van Einstein over Algemene Relativiteit.

Afleiding van vergelijking (57) uit vergelijking (53)

We vertrekken vanuit vergelijking (53) in Einsteins artikel:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

Hierbij geldt:

- $T_{\mu\nu}$ is de energie-impuls-tensor,
- $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ is het spoor ervan,
- en we nemen aan dat $\sqrt{-g} = 1$, zoals Einstein in sectie 18 doet.

Stap 1: Vermenigvuldig met $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}$

We vermenigvuldigen beide zijden van vergelijking (53) met $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}$, oftewel:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \right) = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \left(-\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \right) =$$

Dit leidt tot:

$$= -\kappa \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T \right)$$

Stap 2: Gebruik dat $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} g_{\mu\nu} = 0$

Uit vergelijking (29) in Einsteins artikel volgt:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\sigma}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}$$

Omdat $\sqrt{-g} = -1$, is de afgeleide daarvan nul. Dus:

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = 0$$

Ingevuld krijgen we:

$$= -\kappa \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T \right) = -\kappa \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} - 0 \right) = -\kappa \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu}$$

Dan wordt de vergelijking:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta + \kappa \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0$$

De volgende stap geeft:

$$\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0 \quad (1)$$

Vervang dit in:

$$\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (-2\kappa t_\sigma^\alpha) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0$$

Kijk voor de uitwerking van het gele gedeelte onder de gestreepte lijn hieronder.

Dit leidt tot:

$$-\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0 \quad (2)$$

Gebruik nu Einsteins vergelijking (56):

$$\frac{\partial(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma)}{\partial x^\sigma} = 0$$

Dus:

$$\frac{\partial t_\mu^\sigma}{\partial x^\sigma} = -\frac{\partial T_\mu^\sigma}{\partial x^\sigma}$$

Vervang σ door α , en μ door σ :

$$\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

De vergelijking (2) wordt:

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0 \quad (57)$$

Dit is precies Einsteins vergelijking (57).

=====

Afleiding van de gele stap:

Om te bewijzen dat:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (-2\kappa t_\sigma^\alpha) = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$$

Gebruiken we Einstein vergelijking (48):

$$\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$$

$$\frac{\partial H}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$$

Einstein vergelijking (47b):

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) = \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$$

Kan herschreven worden als:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}$$

Nu kunnen we differentiëren:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial (g_\sigma^{\mu\nu})}{\partial x^\alpha} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}$$

Hier geldt:

$$\frac{\partial (g_\sigma^{\mu\nu})}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} = \frac{\partial (g_\alpha^{\mu\nu})}{\partial x^\sigma}$$

Vul dit in:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial (g_\alpha^{\mu\nu})}{\partial x^\sigma} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$$

Zoals vermeld in Einsteins document onder vergelijking (47a), wordt H beschouwd als een functie van $g^{\mu\nu}$ en $g_\sigma^{\mu\nu} \left(= \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right)$, dus:

$$\frac{\partial H}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial H}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \frac{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$$

Vul dit in:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial x^\sigma}$$

Of:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (H) \\ & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\delta_\sigma^\alpha H) \\ & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \delta_\sigma^\alpha H \right) \end{aligned}$$

Volgens Einstein vergelijking (49):

$$-2\kappa t_\sigma^\alpha = g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} - \delta_\sigma^\alpha H$$

Vul dit in vergelijking (1):

$$\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0$$

Wordt:

$$\frac{1}{2\kappa} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (-2\kappa t_\sigma^\alpha) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0$$

q.e.d.

7.5 Vraag over vergelijking in Einsteins origineel werk (Engelse versie)

Vraag:

Ik voeg opnieuw het PDF-bestand toe van Einsteins artikel ter referentie (Einstein, *Relativity: The Special and General Theory*, 1916 – herziene editie 1924; ook in *The Collected Papers of Albert Einstein*, 1997).

Onderaan pagina 191 van de Engelse versie staan drie termen, gescheiden door gelijkheidstekens. Ik begrijp niet waarom de eerste term gelijk is aan de tweede. Einstein verwijst naar vergelijking (60), maar die helpt me niet verder.

Kun je uitleggen waarom die twee termen aan elkaar gelijk zijn?

Antwoord:

We bekijken eerst vergelijking (60) in Einsteins originele Duitse artikel.

Op pagina 812 van het Duitse origineel lijkt een fout te staan in vergelijking (60):

$$\frac{\partial F_{\varrho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial F_{\tau\varrho}}{\partial x^\sigma} = 0$$

Waarschijnlijk is dit verkeerd en zou het moeten zijn:

$$\frac{\partial F_{\varrho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial F_{\tau\varrho}}{\partial x^\sigma} = 0 \quad (60)$$

In de Engelse vertaling (pagina 189) is het al gecorrigeerd.

Op pagina 191 (in het Engels) vinden we de volgende vergelijking:

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \quad (1)$$

We richten ons op het eerste gelijkheidsteken:

waarom geldt

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} ?$$

Volgens vergelijking (60) geldt:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0$$

Daaruit volgt:

$$\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}$$

Invullen in vergelijking (1) levert:

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = F^{\mu\nu} \left(-\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \right) = -F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}$$

Nu splitsen we elke term in twee gelijke delen:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} \left(F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \right) \end{aligned}$$

Nu herschikken we de indices (dummy-indices mogen verwisseld worden):

$$= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} \left(F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + F^{\nu\mu} \frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \right)$$

Omdat $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$, verandert het laatste lid van teken:

$$= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} \left(F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \right)$$

Door de indices van $\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}$ om te wisselen en het teken te veranderen:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} \left(F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right) \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} \right) \end{aligned}$$

De uitdrukking tussen haakjes is precies vergelijking (60), die gelijk is aan nul. Dus:

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$$

q.e.d.

7.6 Vraag over Einsteins vergelijking (69)

Vraag:

In vergelijking (69) uit Einsteins boek staat:

$$k = \frac{8\pi K}{c^2} = 1.87 \cdot 10^{-27} \quad (E69)$$

Waarom komt dit getal niet overeen met de waarde die we tegenwoordig gebruiken? En waarom staat er nog een c^2 in de noemer als Einstein eerder heeft gesteld $c = 1$ te nemen?

Antwoord:

Einstein werkte in dit boek met **CGS-eenheden** (centimeter–gram–seconde), terwijl we tegenwoordig meestal **SI-eenheden** (meter–kilogram–seconde) gebruiken. Dat veroorzaakt verschillen in de numerieke waarden van natuurconstanten zoals K (de gravitatieconstante), afhankelijk van het eenhedenstelsel.

Stap 1: Interpretatie van Einsteins notatie

- In Einsteins vergelijking:

$$k = \frac{8\pi K}{c^2}$$

Is:

- K de gravitatieconstante in CGS-eenheden:

$$K = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

- $c = 3.00 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$

Als we deze waarden invullen:

$$k = \frac{8\pi(6.67 \cdot 10^{-8})}{(3.00 \cdot 10^{10})^2} \approx 1.87 \cdot 10^{-27}$$

Dat is precies de waarde die Einstein vermeldt. Zijn berekening klopt dus binnen het CGS-stelsel.

Stap 2: Omschakeling naar moderne eenheden (SI)

In moderne literatuur gebruiken we voor de Einstein-veldvergelijkingen:

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 2.07 \cdot 10^{-43}$$

met:

- $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
- $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Ingevuld:

$$k = \frac{8\pi(6.67 \cdot 10^{-11})}{(3.00 \cdot 10^8)^4} \approx 2.07 \cdot 10^{-43} \text{ m}^{-1}\text{kg}^{-1}\text{s}^2$$

Stap3: Waarom is er nog een c^2 in Einsteins vergelijking?

Hoewel Einstein op andere plaatsen in het boek de conventie $c=1$ gebruikt (natural units), blijft hij hier c expliciet noteren. Dat is waarschijnlijk omdat hij op dit punt nog een **numerieke schatting** wilde geven die correspondeert met concrete fysische eenheden, en dus even afzag van de conventie $c=1$.

Conclusie:

- Einsteins waarde van $k \approx 1.87 \cdot 10^{-27}$ is correct in **CGS-eenheden**.
- In **moderne SI-eenheden** is $k \approx 2.07 \cdot 10^{-43}$.
- De notatie met expliciete c^2 duidt erop dat Einstein hier **nog niet overgeschakeld was op natural units** (waar $c=1$), om een concrete waarde te berekenen.

Appendices

Appendix 1 Formules van de Algemene Relativiteitstheorie

Hieronder geven we een samenvatting van een aantal eerder afgeleide algemene relativiteitstheorie- en Schwarzschild-formules. Vervolgens leiden we alle formules af die relevant zijn voor berekeningen in verschillende hoofdstukken. In deze appendix passen we de Einstein-notatie toe.

Algemene Relativiteitstheorie Formules:

Einsteins veldvergelijkingen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Waarbij:

- $R_{\mu\nu}$ de Ricci-tensor is
- $g_{\mu\nu}$ de metrische tensor
- R de Ricci-scalar
- λ de kosmologische constant
- $T_{\mu\nu}$ de energie-impuls-tensor

Schwarzschild metriek (in sferische coördinaten):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Waarbij:

- ds^2 het ruimte-tijdinterval is
- G de gravitatieconstante
- M de massa van het centrale object
- r de radiale coördinaat
- θ en ϕ zijn sferische coördinaten.

De coëfficiënten zijn dus niet afhankelijk van t en ϕ maar alleen van r en θ !

Tijdvertraging voor een bolvormig object (Gravitational Time Dilation):

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$$

Waarbij:

- $\Delta\tau$ de eigen tijd is voor een waarnemer op een afstand r
- Δt de tijd is voor een verre waarnemer

Baan van licht (Null-geodeten):

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Krommingsradius van licht om een massa:

De afwijking van lichtstraal bij de aanwezigheid van een zwaartekrachtveld wordt gegeven door:

$$\delta\phi = \frac{4GM}{rc^2}$$

Appendix 1.1 Samenvatting en afleiding van verdere relevante formules:

In deze sectie zullen we de relevante formules voor de specifieke berekeningen in de hoofdstukken afleiden. Dit omvat de afleiding van de metrische tensor, geodetenvergelijkingen, en de energie-impuls-tensor in verschillende configuraties.

$$\begin{aligned}
dx^m &= \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r \\
ds^2 &= \eta_{mn} d\xi^m d\xi^n \\
ds^2 &= g_{mn}(x) dx^m dx^n = g_{pq}(y) dy^p dy^q \\
g_{pq}(y) &= g_{mn}(x) \frac{\partial x^m}{\partial y^p} \frac{\partial x^n}{\partial y^q} \\
V'^n(y) &= \frac{\partial y^n}{\partial x^m} V^m(x) \\
W'_p(y) &= \frac{\partial x^q}{\partial y^p} W'_q(x) \\
T_{mn}(x) &= \frac{\partial V^m(x)}{\partial x^n} \\
T_{mn}(y) &= \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial x^s}{\partial y^n} T_{rs}(x) \\
T^{mn}(y) &= \frac{\partial y^m}{\partial x^r} \frac{\partial y^n}{\partial x^s} T^{rs}(x) \\
T^{rs}(x) &= A_x^r B_x^s \\
E_\mu &= g_{\mu\vartheta} E^\vartheta \\
E^\mu &= g^{\mu\vartheta} E_\vartheta = g^{\mu\vartheta} g_{\vartheta\rho} E^\rho = \delta_\rho^\mu E^\rho = E^\mu
\end{aligned}$$

Lijnsegment in klein gebied geldt: Pythagoras:

$$ds^2 = \delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^n} dy^n \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^s} dy^s$$

Transformeren naar ander frame:

$$ds^2 = \boxed{\delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^r} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^s}} dy^r dy^s$$

$$\textbf{metric tensor: } g_{mn} = \delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^r} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^s}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Geodetische vergelijking:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\
T'_{\mu\vartheta}(y) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\vartheta} T_{\alpha\beta} \\
T'^{\mu\vartheta}(y) &= \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\vartheta}{\partial x^\beta} T_{\alpha\beta} \\
T'^{\vartheta}_\mu(y) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\vartheta}{\partial x^\beta} T_\alpha^\beta \\
g_{\mu\alpha} g^{\alpha\vartheta} &= \delta_\mu^\vartheta
\end{aligned}$$

Contractie:

$$\begin{aligned}
A^\mu &= g^{\mu\vartheta} A_\vartheta \\
A_\mu &= g_{\mu\vartheta} A^\vartheta \\
\text{so: } A \cdot B &= g_{\mu\vartheta} A^\mu B^\vartheta \equiv A_\vartheta B^\vartheta
\end{aligned}$$

Ricci Tensor:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R_{\mu\rho\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \\
G_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \text{ only if } g = \det(g_{\mu\nu}) = -1
\end{aligned}$$

Christoffel-symbol:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

Ricci scalar:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= R_\mu^\mu \\
R &= g^{ab} (\Gamma_{ab,c}^c - \Gamma_{ac,b}^c + \Gamma_{ab}^d \Gamma_{cd}^c - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c) \\
R &= 2g^{ab} (\Gamma_{a[b,c]}^c + \Gamma_{a[b}^d \Gamma_{c]d}^c)
\end{aligned}$$

Appendix 1.2 Schwarzschild Metriek – Sferische Coördinaten

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$\sigma^2 = 1 - \frac{R_s}{r} \text{ hier is: } R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\begin{aligned} g_{00} &= g_{tt} & g_{22} &= g_{\theta\theta} \\ g_{11} &= g_{rr} & g_{33} &= g_{\phi\phi} \end{aligned}$$

Schwarzschild in sferische coördinaten (in vlak $\theta = 90^\circ$)

$$\begin{aligned} g_{00} &= \sigma^2 & g^{00} &= \frac{1}{\sigma^2} \\ g_{11} &= \frac{-1}{\sigma^2} & g^{11} &= -\sigma^2 \\ g_{22} &= -r^2 & g^{22} &= \frac{-1}{r^2} \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta = -r^2 & g^{33} &= \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{-1}{r^2} \\ & & \frac{d\sigma}{dr} &= \frac{R_s}{2r^2 \sigma} \end{aligned}$$

Metriek eerste afgeleide voor sferische coördinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} &= \frac{R_s}{r^2} & \frac{\partial g_{11}}{\partial r} &= \frac{R_s}{r^2 \sigma^4} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} &= -2r & \frac{\partial g_{33}}{\partial r} &= -2r \sin^2 \theta = -2r \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} &= -2r^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Metriek tweede afgeleide voor sferische coördinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial r^2} &= \frac{-2R_s}{r^3} & \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial r^2} &= \frac{-2R_s}{r^3 \sigma^6} \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r^2} &= -2 & \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r^2} &= -2 \sin^2 \theta = -2 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta \partial r} &= -4r \cdot \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} &= 2r^2 \cdot (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) = 2r^2 \end{aligned}$$

Schwarzschild sferische coördinaten:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\} \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right\} = \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = -r\sigma^2 \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = -r\sigma^2 \sin^2 \theta = -r\sigma^2 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = -\cos \theta \sin \theta = 0 \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0 \end{aligned}$$

In **r, theta, phi** coördinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial r} &= \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial r} = \frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial r} &= \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial r} &= \frac{R_s(2r - R_s)}{2r^4 \sigma^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial r} &= -1 \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial r} &= -\sin^2 \theta \\ \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} &= \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial r} = \frac{-1}{r^2} \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial \theta} &= -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial \theta} &= \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial \theta} = \frac{-1}{\sin^2 \theta} = -1 \end{aligned}$$

Schwarzschild in **r, theta, phi** coördinaten:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

Eerste afgeleide van het Christoffel-symbool:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\delta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x^{\delta}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} \\ + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} \right\}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\delta}} = \frac{-1}{2} (g^{\rho\alpha})^2 \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\delta}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} \\ + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} \right\}$$

=====

Appendix 1.3 Schwarzschild Metriek - x,y,z Coördinaten

$$\begin{aligned}x_0 &= t_\infty & dx_0 &= dt_\infty \\x_1 &= \frac{r^3}{3} & dx_1 &= r^2 \cdot dr & \frac{dr}{dx_1} &= \frac{1}{r^2} \\x_2 &= -\cos \theta = 0 & dx_2 &= \sin \theta \cdot d\theta = d\theta & \frac{d\theta}{dx_2} &= \frac{1}{\sin \theta} \\x_3 &= \emptyset & dx_3 &= d\emptyset\end{aligned}$$

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt_\infty^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - \frac{r^2 dx_2^2}{\sin^2 \theta} - r^2 \sin^2 \theta dx_3^2$$

Aanname op equator niveau $\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1$

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt_\infty^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - r^2 dx_2^2 - r^2 dx_3^2$$

Schwarzschild metriek in x, y, z

$$\begin{aligned}g_{00} &= \sigma^2 & g^{00} &= \frac{1}{\sigma^2} \\g_{11} &= -\frac{1}{r^4 \sigma^2} & g^{11} &= -r^4 \sigma^2 \\g_{22} &= -\frac{r^2}{\sin^2 \theta} & g^{22} &= -\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \\g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta = -r^2 & g^{33} &= \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{-1}{r^2}\end{aligned}$$

g's zijn afhankelijk van r (dus x_1) en θ (dus x_2):

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{1}{r^2} \quad \frac{d\sigma}{dx_1} = \frac{R_s}{2r^4 \sigma} \quad \frac{d\theta}{dx_2} = \frac{1}{\sin \theta}$$

Metriek afgeleide voor x, y, z

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \frac{dr}{dx_1} = 2\sigma \frac{R_s}{2r^4 \sigma} = \frac{R_s}{r^4} \\ \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} &= \frac{4r - 3R_s}{r^8 \sigma^4} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \frac{dr}{dx_1} = r^{-2} \left(\frac{-2r}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{-2}{r \sin^2 \theta} = \frac{-2}{r} \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} &= r^{-2} (-2r \sin^2 \theta) = \frac{-2 \sin^2 \theta}{r} = \frac{-2}{r} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} &= \frac{2r^2 \cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2r^2 \cos(\theta)}{\sin^4(\theta)} = 0 \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx_2} = (-2r^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)) \frac{1}{\sin \theta} \\ &= -2 \cdot r^2 \cdot \cos(\theta) = 0\end{aligned}$$

Metriek tweede afgeleide voor x, y, z coördinaten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x_1^2} &= \frac{-4R_s}{r^7} & \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_1^2} &= \frac{-2(14r^2 + 9R_s^2 - 22rR_s)}{r^{12} \sigma^6} \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} &= \frac{2}{r^4 \sin^2(\theta)} = \frac{2}{r^4} \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_2^2} &= \frac{-2r^2(1 + 3 \cos^2(\theta))}{\sin^6(\theta)} = -2r^2 \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{4 \cos(\theta)}{r \sin^4(\theta)} = 0 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_1^2} &= \frac{2 \sin^2(\theta)}{r^4} = \frac{2}{r^4} \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{-4 \cos(\theta)}{r} = 0 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_2^2} &= 2r^2 \cdot \sin \theta \frac{1}{\sin \theta} = 2r^2\end{aligned}$$

Schwarzschild in x, y, z

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\} \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{R_s}{r^4} = \frac{R_s}{2r^4 \sigma^2} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{-R_s}{r^4} = \frac{R_s \sigma^2}{2} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{4r - 3R_s}{r^8 \sigma^4} = \frac{3R_s - 4r}{2r^4 \sigma^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{2}{r \sin^2 \theta} = \frac{-r^3 \sigma^2}{\sin^2 \theta} \\ &= -r^3 \sigma^2 \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{2 \sin^2 \theta}{r} \\ &= -r^3 \sigma^2 \sin^2 \theta = -r^3 \sigma^2 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \frac{-2}{r \sin^2 \theta} = \frac{1}{r^3} \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) (2 \cdot r^2 \cdot \cos(\theta)) \\ &= -\sin^2 \theta \cos \theta = 0 \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \frac{2r^2 \cos(\theta)}{\sin^4(\theta)} \\ &= \frac{-\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} = 0 \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \frac{-2 \sin^2 \theta}{r} \\ &= \frac{1}{r^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) (-2 \cdot r^2 \cdot \cos(\theta)) \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} = 0
\end{aligned}$$

Voor x, y, z coördinaten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x_1} = \frac{\mathbf{R}_s(3\mathbf{R}_s - 4\mathbf{r})}{2\mathbf{r}^8 \sigma^4} \\
\frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial x_1} &= \frac{\mathbf{R}_s^2}{2\mathbf{r}^4} \\
\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x_1} &= \frac{6}{\mathbf{r}^6 \sigma^4} - \frac{10\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}^7 \sigma^4} + \frac{4 \cdot 5\mathbf{R}_s^2}{\mathbf{r}^8 \sigma^4} \\
\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} &= \frac{2\mathbf{R}_s - 3\mathbf{r}}{\mathbf{r} \sin^2 \theta} = -3 + \frac{2\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}} \\
\frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x_1} &= \left(-3 + \frac{2\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}} \right) \cdot \sin^2 \theta = -3 + \frac{2\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}} \\
\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial x_1} = \frac{-3}{\mathbf{r}^6} \\
\frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial x_1} = 0 \\
\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_2} &= \frac{2\mathbf{r}^3 \sigma^2 \cos \theta}{\sin^4 \theta} = 0 \\
\frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x_2} &= -2\mathbf{r}^3 \sigma^2 \cos \theta = 0 \\
\frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x_2} &= -3 \cos^2 \theta + 1 = 1 \\
\frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x_2} &= \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = 1 \\
\frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x_2} &= \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial x_2} = \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = -1
\end{aligned}$$

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jl}^u \Gamma_{uk}^i - \Gamma_{jk}^u \Gamma_{ul}^i$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho}$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho}^{\rho} = -\Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} + \Gamma_{\mu\rho,\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho}$$

Na enkele berekeningen was de conclusie dat, om alle elementen van de Ricci-tensor nul te krijgen in vacuüm, de formule voor het Christoffel-symbool moet beginnen met een positieve +1/2:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = +\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

Het teken aan het begin van de Christoffel-symbolen heeft geen invloed op het **product** van de Christoffel-symbolen in het element van de Ricci-tensor, maar alleen op het teken van de eerste twee termen: de **afgeleiden van de Christoffel-symbolen**.

Schwarzschild symmetrie:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = & \Gamma_{\mu\nu,0}^0 - \Gamma_{0\mu,\nu}^0 + \Gamma_{0\lambda}^0 \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^0 \Gamma_{0\mu}^{\lambda} \\ & + \Gamma_{\mu\nu,1}^1 - \Gamma_{1\mu,\nu}^1 + \Gamma_{1\lambda}^1 \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^1 \Gamma_{1\mu}^{\lambda} \\ & + \Gamma_{\mu\nu,2}^2 - \Gamma_{2\mu,\nu}^2 + \Gamma_{2\lambda}^2 \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^2 \Gamma_{2\mu}^{\lambda} \\ & + \Gamma_{\mu\nu,3}^3 - \Gamma_{3\mu,\nu}^3 + \Gamma_{3\lambda}^3 \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^3 \Gamma_{3\mu}^{\lambda} \end{aligned}$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}$$

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 = \frac{R_s^2}{2r^4} - \frac{1}{2} \frac{4r - 3R_s}{r^4 \sigma^2} \frac{1}{2} R_s \sigma^2 - \frac{1}{2} R_s \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{R_s}{r^4 \sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{R_s}{r^4 \sigma^2} \frac{1}{2} R_s \sigma^2$$

$$R_{11} = -\Gamma_{01,1}^0 - \Gamma_{21,1}^2 - \Gamma_{31,1}^3 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{32,2}^3 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1$$

$$R_{33} = \Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3$$

Voor sferische coördinaten en de Schwarzschild-configuratie met $\theta = 90^0$, zijn de volgende elementen van de Ricci-tensor relevant:

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{10}^0$$

$$R_{11} = -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$$

$$R_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta \cdot R_{22}$$

Wanneer $\theta \neq 90^0$ dan is er respectievelijk voor R_{22} and R_{33} een extra term $+\Gamma_{22}^2 \Gamma_{32}^3$ en $+\Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2$.

Appendix 2 Afleiding van Afgeleide van de Christoffel-Symbolen in een Algemene Vorm

Er wordt aangetoond hoe het Christoffel-symbool alleen afhangt van de elementen van de metrische tensor en diens afgeleiden. Dit is handig bij gebruik in een spreadsheet of programma.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \right\}$$

$$\frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \frac{1}{g_{\rho\alpha}} = \frac{-1}{g_{\rho\alpha}^2} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} = -(g^{\rho\alpha})^2 \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{-1}{2} (g^{\rho\alpha})^2 \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \right\}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left[-g^{\rho\alpha} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \right\} \right]$$

Of:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} = -g^{\rho\alpha} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \cdot \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \right\}$$

Appendix 3 Wiskundige Uitwerking van Schwarzschild

Hier zullen we de Christoffel-symbolen uitwerken voor de metrische tensor van de Schwarzschild-configuratie.

Schwarzschild in r, theta, phi coördinaten:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\}$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\}$$

Alle elementen in de metrische tensor zijn nul, behalve de elementen in de diagonaal. Dit betekent dat de contravariante elementen de directe inverse zijn van de covariante componenten. Dus bijvoorbeeld $g^{00} = \frac{1}{g_{00}}$ enzovoort.

Voor r, theta, phi coördinaten:

Afgeleiden van gamma naar $x_1=r$:

$$0011 = 0101 = \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{00}^2} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{00}} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{00}} \left\{ \frac{-1}{g_{00}} (g_{00}')^2 + g_{00}'' \right\}$$

$$1001 = \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial r^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} g_{11}' g_{00}' + g_{00}'' \right\}$$

$$1111 = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} (g_{11}')^2 + g_{11}'' \right\}$$

$$1221 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} g_{11}' g_{22}' + g_{22}'' \right\}$$

$$1331 = \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} g_{11}' g_{33}' + g_{33}'' \right\}$$

$$2121 = 2211 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} (g_{22}')^2 + g_{22}'' \right\}$$

$$3131 = 3311 = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} (g_{33}')^2 + g_{33}'' \right\}$$

$$2331 = \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\} = \frac{-1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} g_{22}' \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\}$$

$$3231 = 3321 = \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} g_{33}' \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\}$$

Afgeleiden van gamma naar $x_2=\theta$:

$$1222 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial \theta} = \frac{-1}{2g_{11}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r \partial \theta}$$

$$1332 = \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial \theta} = \frac{-1}{2g_{11}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta}$$

$$2332 = \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial \theta} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$2222 = \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$3312 = 3132 = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial \theta} = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} g_{33}' \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\}$$

$$3232 = 3322 = \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial \theta} = \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\}$$

Appendix 4 De Schwarzschild Formule uitgebreid voor Elektrische Ladingen.

Reissner–Nordström-metriek

De juiste oplossing binnen de algemene relativiteitstheorie voor een geladen, niet-draaiende sferisch symmetrische massa is de Reissner–Nordström-metriek (1918). Deze metriek beschrijft het ruimtetijd-interval rond een geladen massa en verwerkt zowel de gravitationele als de elektrische bijdrage:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

of

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

waarbij:

- $r_s = \frac{2GM}{c^2}$: Schwarzschildradius (massa-effect),
- $r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}$: lading-term,
- Q : elektrische lading van het centrale object,
- M : massa van het object,
- G : gravitatieconstante,
- c : lichtsnelheid.

Interpretatie

- De eerste term $\left(\frac{r_s}{r}\right)$ geeft de gravitationele vervorming van het vacuum weer zoals in de Schwarzschild-oplossing.
- De toevoeging van de $\frac{r_Q^2}{r^2}$ term beschrijft het repulsieve (voor gelijk geladen deeltjes) elektromagnetische effect volgens de algemene relativiteitstheorie.
- Deze metriek reduceert tot de gewone Schwarzschildoplossing als $Q = 0$ (dus geen lading).
- Voor draaiende of extra geladen objecten (zoals elektronen) bestaan er nog uitgebreidere oplossingen, zoals de Kerr-Newman-metriek.

In de klassieke natuurkunde van Newton is er in het vacuüm een gravitatie veld. Echter volgens Einstein is er geen gravitatieveld, maar is ruimte-tijd vervormd tengevolge van gravitatie. In dat geval geldt dat $T_{\mu\nu} = 0$.

In het geval van de Reissner–Nordström-oplossing is de stress-energie-tensor $T_{\mu\nu}$ niet overal nul, zelfs al spreekt men van een “vacuüm”.

Uitleg

- In het klassieke Schwarzschild-geval (zonder lading) is $T_{\mu\nu} = 0$ in het vacuüm buiten de massa: er is daar geen materie of veld meer aanwezig, zodat Einstein's veldvergelijking reduceert tot de vacuümvergelijking.
- In het geval van Reissner–Nordström echter is er in het vacuüm rondom de centrale lading nog steeds een elektromagnetisch veld; dat elektromagnetisch veld draagt energie en impuls, dus een niet-nul stress-energie-tensor.
- Specifiek beschrijft $T_{\mu\nu}$ in dit geval de energie/momentum van het radiale elektrische veld. Dit betekent dat de Einstein-vergelijking een elektromagnetisch veld als bron heeft, óók als er verder geen materie (zoals massa of stof) buiten het centrale object is.

Samengevat: in de Reissner–Nordström-metrick is $T_{\mu\nu} \neq 0$ in het “vacuüm” omdat het elektromagnetisch veld van de lading fysisch reëel is en energie bevat.

Afleiding van de Reissner–Nordström-metrick

Hier volgt een stap-voor-stap afleiding van de Reissner–Nordström-metrick vanaf de Einstein–Maxwell-vergelijkingen. Dit is de standaard procedure in de algemene relativiteitstheorie om de ruimtetijd van een sferisch symmetrische, geladen massa te bepalen.

Stap 1: Uitgangspunten — metrick en bron

We zoeken een statische, sferisch symmetrische oplossing in de vorm (sferische coördinaten):

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = A(r)c^2 dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$A(r)$ en $B(r)$ zijn onbekende functies van de radius r .

- De bron is een elektromagnetisch veld van een puntlading Q .
- De stress-energie-tensor van het elektromagnetisch veld is (in natuurlijke eenheden):

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

Hierbij is:

- $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ de elektromagnetische veldtensor,
- A_{μ} is de vierdimensionale elektromagnetische potentiaal,
- $g_{\mu\nu}$ de metrick,
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ de magnetische permittiviteit van het vacuum.

Hier is:

$$A_{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, -A \right) \text{ of } A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, A \right)$$

- ϕ = elektrische potentiaal (in Volt),
- $A = (A_x, A_y, A_z)$ = magnetische vectorpotentiaal (in Weber per meter),
- c = lichtsnelheid.

De **elektromagnetische veldtensor** (*electromagnetic field strength tensor*) $F_{\mu\nu}$ bevat alle informatie over het elektrische veld **E** en het magnetische veld **B**.

In matrixvorm geldt:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{Q}{r^2} & 0 & 0 \\ -\frac{Q}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Het enige niet-nul component van $F_{\mu\nu}$ in het radiaal elektrisch veld is:

$$F_{tr} = -F_{rt} = \frac{Q}{r^2}$$

Stap 2: Einstein–Maxwell-vergelijkingen

De Einstein-vergelijking met elektromagnetische bron is:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

waarbij $G_{\mu\nu}$ de Einstein-tensor is van de metriek.

De Maxwell-vergelijkingen in vacuüm zijn:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

en

$$\nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$$

Voor de statische, sferisch-symmetrische situatie geeft dit:

$$F^{tr} = \frac{Q}{r^2} \frac{1}{\sqrt{A(r)B(r)}}$$

Stap 3: Berekenen van Einstein-tensor

De Einstein-tensorcomponenten voor de algemene metriek zijn:

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{B'}{rB^2} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{B}\right) \\ G_r^r &= \frac{A'}{rAB} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{B}\right) \\ G_\theta^\theta &= G_\phi^\phi = \frac{1}{4AB} \left(2A'' - \frac{A'B'}{B} + \frac{A'^2}{A}\right) - \frac{1}{2rB} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) \end{aligned}$$

waar een prime ' differentiëren naar r betekent.

Stap 4: Stress-energie-tensorcomponenten

De stress-energie-tensor van het elektrische veld is diagonaal met:

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{Q^2}{8\pi r^4}, \quad T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = \frac{Q^2}{8\pi r^4}$$

Stap 5: Vergelijkingen koppelen en oplossen

De Einstein-vergelijkingen worden expliciet:

$$\frac{B'}{rB^2} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = -\frac{Q^2}{r^4}$$
$$\frac{A'}{rAB} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = -\frac{Q^2}{r^4}$$

Ermee werken leidt tot:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

waar M een integratieconstante is die de massa vertegenwoordigt (in geometrische eenheden).

Stap 6: Resultaat — Reissner–Nordström metriek

De oplossing is nu de metrieklijn:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

waar $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$

Conclusie

De Reissner–Nordström-metriek is de unieke statische, sferisch symmetrische oplossing van de Einstein-Maxwell-vergelijkingen met een puntmassa en elektrische lading. Dit betekent dat zowel gravitationele als elektromagnetische krachten worden meegenomen in de ruimtetijdbeschrijving.

Opmerking

De klassieke Schwarzschild-oplossing is een exacte oplossing van Einstein's veldvergelijkingen, maar wel onder de expliciete aanname dat de kosmologische constante $\lambda = 0$ is. In de originele Schwarzschild-afleiding wordt deze λ -term dus **verwaarloosd** of afwezig gelaten, wat betekent dat de metriek geen rekening houdt met kosmologische expansie of repulsie die door een niet-nul λ zou worden veroorzaakt.

In hoeverre wordt λ meegerekend?

- De “standaard” Schwarzschild-metriek betreft een statisch, vacuümpoplossing *zonder* kosmologische constante:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

of

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

waarbij $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ en $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$.

- De volledige Einsteinvergelijking luidt:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

maar in Schwarzschild wordt voor de afleiding $\lambda = 0$ genomen (dus géén kosmologische constante).

Als $\lambda \neq 0$: de Schwarzschild–de Sitter metriek

Wanneer de λ -term wel wordt meegenomen, ontstaat de zogenaamde Schwarzschild–de Sitter (of Kottler) metriek:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Dit is ook een *exacte* oplossing, maar bevat nu expliciet de kosmologische constante en beschrijft bijvoorbeeld een zwart gat in een uitdijend universum.

Conclusie

- De Schwarzschild-metriek is als oplossing exact, maar alleen voor het geval $\lambda = 0$.
- Voor $\lambda \neq 0$ wordt het effect wél geheel meegenomen in de daartoe behorende oplossing, die dan Schwarzschild–de Sitter heet.
- Het verwaarlozen van λ is doorgaans gerechtvaardigd voor sterren of planeten, omdat λ extreem klein is in verhouding tot lokale zwaartekrachtsvelden.

Dus: de klassieke Schwarzschild-metriek zelf is exact, maar alleen onder de aanname dat de kosmologische constante geen rol speelt.

Reissner–Nordström–de Sitter-metriek

Wanneer we nu nog een stap verder gaan en de Schwarzschild–de Sitter metriek integreren in de Reissner–Nordström metriek dan krijgen we als resultaat de Reissner–Nordström–de Sitter-metriek:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2} - \frac{\lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2} - \frac{\lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Uitleg van de termen

- $\frac{2GM}{c^2 r}$: gravitationele (massa-)term — aantrekking door massa
- $\frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}$: elektromagnetische (lading-)term — repulsief voor gelijke ladingen
- $\frac{\lambda r^2}{3}$: kosmologische term — repulsief bij $\lambda > 0$ (de Sitter), aantrekkend bij $\lambda < 0$ (anti-de Sitter)

Speciale gevallen

- $\lambda = 0$ -> gewone **Reissner–Nordström-metrik**
- $Q = 0$ -> **Schwarzschild–de Sitter** (of Kottler) metrik
- $Q = 0, \lambda = 0$ -> klassieke **Schwarzschild-metrik**

Appendix 5 Schwarzschild Oplossing binnen een Massa ($\rho = \text{const.}$) - Volledige tensorafleiding.

Appendix 5.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt de volledige tensorafleiding gegeven van de **interne Schwarzschild-oplossing**: de oplossing van de Einstein-veldvergelijkingen voor een statische, sferisch symmetrische massa met constante dichtheid ρ . We werken in Schwarzschild-coördinaten met de metrik:

$$ds^2 = e^{v(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

waarbij $v(r)$ en $\lambda(r)$ functies van r zijn die moeten worden bepaald.

De energie-impulstensor van een perfecte vloeistof luidt:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (2)$$

Hierin geldt:

- Het eerste deel $(\rho c^2 + p) u_\mu u_\nu$ is de bijdrage van **bewegende energie + druk**
- Het tweede deel $-p g_{\mu\nu}$ zorgt dat het tensorontwerp klopt met de Lorentz-invariantie en de isotropie van een perfecte vloeistof.
- ρ = massadichtheid (in rustframe van de vloeistof)
- ρc^2 = energiedichtheid van de stof
- p = isotrope druk
- $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ viersnelheid van de materie, met de normalisatie: $u^\mu u_\mu = 1$
- $g_{\mu\nu}$ = metrische tensor

De druk p verschijnt in de tensor omdat in de algemene relativiteit **niet alleen energie**, maar ook **druk en spanning** bijdragen aan de kromming van de ruimtetijd. Druk is namelijk een vorm van energie per volume en moet daarom worden opgenomen in de totale energie-inhoud van het systeem. In een ideaal (isotroop) ruststelsel van de vloeistof reduceert (2) tot:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 e^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

waaruit duidelijk blijkt dat ρc^2 de energiedichtheid vormt en de ruimtelijke diagonaalelementen exact overeenkomen met de isotrope druk p . De vorm van (1.2) volgt rechtstreeks uit de eisen van isotropie en Lorentz-invariantie: het gedeelte $(\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu$ representeert de energie- en impulsdichtheid langs de bewegingsrichting, terwijl het term $-pg_{\mu\nu}$ de isotrope druk vertegenwoordigt die in alle ruimtelijke richtingen gelijk is.

Hier is

$$u^\mu = (e^{-\nu/2}, 0, 0, 0), u_\mu = (e^{\nu/2}, 0, 0, 0) \Rightarrow u^\mu u_\mu = 1 \quad u_\mu u_\mu = (e^\nu, 0, 0, 0)$$

voor een statische vloeistof. Hieruit volgt direct:

$$\begin{aligned} T_t^t &= \rho c^2, & T_r^r &= T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = p \\ T_{tt} &= T_t^t & T_{rr} &= g_{rr} T_r^r & T_{\theta\theta} &= g_{\theta\theta} T_\theta^\theta & T_{\phi\phi} &= g_{\phi\phi} T_\phi^\phi \end{aligned} \quad (3)$$

Dus:

$$u_\mu u_\nu = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kort: **alle elementen behalve (t,t) zijn nul**; $u_t u_t = e^\nu$.

Dit verklaart ook waarom in coördinaatcomponenten van $T_{\mu\nu}$ de tijd–tijdcomponent $\rho c^2 e^\nu$ verschijnt:

$$T_{00} = (\rho c^2 + p)u_t u_t - p g_{tt} = \rho c^2 e^\nu$$

en

$$\begin{aligned} T_{rr} &= (\rho c^2 + p)u_r u_r - p g_{rr} = -p(-e^\lambda) = p e^\lambda \\ T_{\theta\theta} &= (\rho c^2 + p)u_\theta u_\theta - p g_{\theta\theta} = -p(-r^2) = p r^2 \\ T_{\phi\phi} &= (\rho c^2 + p)u_\phi u_\phi - p g_{\phi\phi} = -p(-r^2 \sin^2 \theta) = p r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

De Einstein-vergelijkingen luiden zoals gebruikelijk:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4)$$

Toelichting

De metriek (1) is de meest algemene statische, sferisch symmetrische metriek. De functie $\nu(r)$ bepaalt de tijdsvertraging in het zwaartekrachtsveld, terwijl $\lambda(r)$ de kromming in radiale richting weergeeft. Door deze twee functies te bepalen uit de veldvergelijkingen verkrijgen we de volledige geometrische structuur van het binnenveld.

Appendix 5.2 Berekening van de Christoffel-symbolen

Vergelijking van de Christoffel-symbolen:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

Interne Schwarzschild-vergelijking:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Metriek en afgeleide van metriek:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \frac{dg_{\mu\nu}}{dx^r} = \begin{pmatrix} v' e^\nu & -0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda' e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2r \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Voor deze metriek zijn de niet-nul Christoffel-symbolen (met $v' = dv/dr, \lambda' = d\lambda/dr$):

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{e^\nu} e^\nu \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2} v' \quad (5a)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{-e^\lambda} \right\} \left\{ -e^\nu \frac{\partial v}{\partial r} \right\} = \frac{1}{2} e^{v-\lambda} v' \quad (5b)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{-e^\lambda} \right\} \left\{ -e^\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right\} = \frac{1}{2} \lambda' \quad (5c)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{-e^\lambda} \right\} \{2r\} = -r e^{-\lambda} \quad (5d)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{-e^\lambda} \right\} \{2r \sin^2 \theta\} = -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta \quad (5e)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{-r^2} \right\} 2r = \frac{1}{r} \quad (5f)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{1}{-r^2 \sin^2 \theta} 2r \sin^2 \theta = \frac{1}{r} \quad (5f)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{-r^2} \{2r^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)\} = -\sin \theta \cos \theta \quad (5g)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{-r^2 \sin^2 \theta} \{-2r^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)\} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \cot \theta \quad (5h)$$

De afgeleiden van de Christoffel symbolen:

$$\frac{\partial \Gamma_{tr}^t}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{rt}^t}{\partial r} = \frac{\partial \frac{1}{2} v'}{\partial r} = \frac{1}{2} v'',$$

$$\frac{\partial \Gamma_{tt}^r}{\partial r} = \frac{\partial \frac{1}{2} e^{v-\lambda} v'}{\partial r} = \frac{1}{2} (e^v e^{-\lambda} v'^2 - e^v e^{-\lambda} \lambda' v' + e^v e^{-\lambda} v'') = \frac{1}{2} e^{v-\lambda} (v'^2 - \lambda' v' + v'')$$

$$\frac{\partial \Gamma_{rr}^r}{\partial r} = \frac{\partial \frac{1}{2} \lambda'}{\partial r} = \frac{1}{2} \lambda''$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^r}{\partial r} = \frac{\partial (-r e^{-\lambda})}{\partial r} = -e^{-\lambda} + r e^{-\lambda} \lambda' = (r \lambda' - 1) e^{-\lambda}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\phi\phi}^r}{\partial r} = \frac{\partial (-r e^{-\lambda} \sin^2 \theta)}{\partial r} = -e^{-\lambda} \sin^2 \theta + r e^{-\lambda} \lambda' \sin^2 \theta = (r \lambda' - 1) e^{-\lambda} \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\theta}{\partial r} &= \frac{\partial \Gamma_{\theta r}^\theta}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{r\phi}^\phi}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{\phi r}^\phi}{\partial r} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \\ \frac{\partial \Gamma_{\phi\phi}^\theta}{\partial \theta} &= \frac{\partial(-\sin \theta \cos \theta)}{\partial \theta} = -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ \frac{\partial \Gamma_{\theta\phi}^\phi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \Gamma_{\phi\theta}^\phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}{\partial \theta} = \frac{-\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} - \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2 \theta} = \frac{-1}{\sin^2 \theta}\end{aligned}$$

Toelichting

De afleiding van deze symbolen is rechtstreeks gebaseerd op de definitie:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right)$$

Slechts de afgeleiden naar r blijven over, omdat de metriek enkel van r afhangt.

Appendix 5.3 Ricci-tensorcomponenten

Zoals we gevonden hebben in Hoofdstuk 2.14.2 Eerste Poging met de Ricci-Tensor als Oplossing vergelijking (4) is de Ricci-definitie:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^\sigma = \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{dx^\sigma} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma}{dx^\nu} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \right)$$

Volledige afleiding van R_{tt}

We zetten $\mu = \nu = t$. Bereken de vier termen één voor één.

$$1. \frac{\partial \Gamma_{tt}^\sigma}{\partial x^\sigma}$$

Alleen $\sigma = r$ levert een bijdrage (omdat de andere $\Gamma_{tt}^\sigma = 0$). Dus

Met $\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} e^{v-\lambda} v'$ (zie boven) gebruiken we de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{tt}^\sigma}{\partial x^\sigma} &= \frac{\partial \Gamma_{tt}^r}{\partial x^r} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} e^{v-\lambda} v' \right)}{\partial x^r} = \frac{1}{2} e^{v-\lambda} (v'' + (v' - \lambda') v') \\ &= \frac{1}{2} e^{v-\lambda} (v'' + (v')^2 - \lambda' v')\end{aligned}$$

$$2. -\frac{\partial \Gamma_{t\sigma}^\sigma}{\partial x^t}$$

Omdat de metriek statisch is (geen t -afhankelijkheid) is deze term nul:

$$-\frac{\partial \Gamma_{t\sigma}^\sigma}{\partial x^t} = 0$$

$$3. \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{tt}^\lambda$$

Alleen $\lambda = r$ geeft een niet-nul Γ_{tt}^λ , dus:

$$\Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma} \Gamma_{tt}^{\lambda} = \Gamma_{\sigma r}^{\sigma} \Gamma_{tt}^r$$

Bereken eerst:

$$\Gamma_{\sigma r}^{\sigma} = \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^{\theta} + \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{2}v' + \frac{1}{2}\lambda' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}(v' + \lambda') + \frac{2}{r}$$

Dus:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma} \Gamma_{tt}^{\lambda} &= \left(\frac{1}{2}(v' + \lambda') + \frac{2}{r}\right) \cdot \frac{1}{2}e^{v-\lambda}v' \\ &= \frac{1}{4}e^{v-\lambda}v'(v' + \lambda') + e^{v-\lambda}\frac{v'}{r}\end{aligned}$$

4. $-\Gamma_{t\lambda}^{\sigma} \Gamma_{t\sigma}^{\lambda}$

We moeten alle niet-nul producten $\Gamma_{t\lambda}^{\sigma} \Gamma_{t\sigma}^{\lambda}$ optellen. De enige relevante Christoffel-symbolen met een 0-index hier zijn $\Gamma_{t\lambda}^{\sigma} = \frac{1}{2}v'$ en $\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2}e^{v-\lambda}v'$. De symmetrie levert twee gelijke termen, dus

$$\begin{aligned}-\Gamma_{t\lambda}^{\sigma} \Gamma_{t\sigma}^{\lambda} &= -2\Gamma_{tr}^t \Gamma_{tt}^r \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2}v' \cdot \frac{1}{2}e^{v-\lambda}v' \\ &= -\frac{1}{2}e^{v-\lambda}(v')^2\end{aligned}$$

5. Sommeer alle termen

Tel nu de vier bijdragen bij elkaar (alle termen hebben gemeenschappelijke factor $e^{v-\lambda}$ behalve de nulterm):

$$R_{tt} = \frac{1}{2}e^{v-\lambda}(v'' + (v')^2 - \lambda'v') + \frac{1}{4}e^{v-\lambda}v'(v' + \lambda') + e^{v-\lambda}\frac{v'}{r} - \frac{1}{2}e^{v-\lambda}(v')^2$$

Dus we krijgen:

$$R_{tt} = \frac{1}{2}e^{v-\lambda}\left(v'' + \frac{1}{2}(v')^2 - \frac{1}{2}\lambda'v' + \frac{2v'}{r}\right)$$

Volledige afleiding van R_{rr}

$$R_{rr} = \left(\frac{d\Gamma_{rr}^{\sigma}}{dx^{\sigma}} - \frac{d\Gamma_{r\sigma}^{\sigma}}{dx^r} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma} \Gamma_{rr}^{\lambda} - \Gamma_{r\lambda}^{\sigma} \Gamma_{r\sigma}^{\lambda}\right)$$

We zetten $\mu = \nu = r$. Bereken ieder van de vier termen los.

$$1. \frac{\partial \Gamma_{rr}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}}$$

Alle niet-nul Γ_{rr}^{σ} is alleen $\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}\lambda'$. Dus:

$$\frac{\partial \Gamma_{rr}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial \Gamma_{rr}^r}{\partial x^r} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2}\lambda'\right)}{\partial x^r} = \frac{1}{2}\lambda''$$

$$2. -\frac{\partial \Gamma_{r\sigma}^\sigma}{\partial x^r}$$

Eerst:

$$\Gamma_{r\sigma}^\sigma = \Gamma_{r0}^0 + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2}v' + \frac{1}{2}\lambda' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}(v' + \lambda') + \frac{2}{r}$$

Differentieer:

$$\frac{\partial \Gamma_{r\sigma}^\sigma}{\partial x^r} = \frac{1}{2}(v'' + \lambda'') - \frac{2}{r^2}$$

Daarom:

$$-\frac{\partial \Gamma_{r\sigma}^\sigma}{\partial x^r} = -\frac{1}{2}(v'' + \lambda'') + \frac{2}{r^2}$$

$$3. \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{rr}^\lambda$$

Alleen $\lambda = r$ geeft bijdrage, want Γ_{rr}^λ is alleen niet-nul voor $\lambda = r$. Dus

$$\Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{rr}^\lambda = \Gamma_{\sigma r}^\sigma \Gamma_{rr}^r = \left(\frac{1}{2}(v' + \lambda') + \frac{2}{r}\right) \cdot \frac{1}{2}\lambda' = \frac{1}{4}(v' + \lambda')\lambda' + \frac{1}{r}\lambda'$$

$$4. -\Gamma_{r\gamma}^\sigma \Gamma_{r\sigma}^\gamma$$

Schrijf expliciet de som van de producten (niet-nul paren):

$$\Gamma_{r\lambda}^\sigma \Gamma_{r\sigma}^\lambda = \Gamma_{r0}^0 \Gamma_{r0}^0 + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi \Gamma_{r\phi}^\phi$$

Invullen:

$$= \left(\frac{1}{2}v'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda'\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{4}(v')^2 + \frac{1}{4}(\lambda')^2 + \frac{2}{r^2}$$

Dus

$$-\Gamma_{r\lambda}^\sigma \Gamma_{r\sigma}^\lambda = -\frac{1}{4}(v')^2 - \frac{1}{4}(\lambda')^2 - \frac{2}{r^2}$$

5. Sommeer alle termen

Nu tellen we 1) tot en met 4) bij elkaar op:

$$R_{rr} = \frac{1}{2}\lambda'' + \left[-\frac{1}{2}(v'' + \lambda'') + \frac{2}{r^2}\right] + \left[\frac{1}{4}(v' + \lambda')\lambda' + \frac{1}{r}\lambda'\right] + \left[-\frac{1}{4}(v')^2 - \frac{1}{4}(\lambda')^2 - \frac{2}{r^2}\right]$$

De $+2/r^2$ en $-2/r^2$ heffen elkaar op; de $\frac{1}{2}\lambda''$ en $-\frac{1}{2}\lambda''$ ook. Vereenvoudig:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= -\frac{1}{2}v'' + \frac{1}{4}(v' + \lambda')\lambda' + \frac{1}{r}\lambda' - \frac{1}{4}(v')^2 - \frac{1}{4}(\lambda')^2 \\ &= -\frac{1}{2}v'' + \frac{1}{4}v'\lambda' + \frac{1}{4}(\lambda')^2 + \frac{1}{r}\lambda' - \frac{1}{4}(v')^2 - \frac{1}{4}(\lambda')^2 \end{aligned}$$

$$= -\frac{v''}{2} - \frac{(v')^2}{4} + \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r}$$

Herschrijven door $-\frac{1}{2}$ buiten te halen geeft de conventionele vorm:

$$R_{rr} = -\frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} v' \lambda' - \frac{2}{r} \lambda' \right)$$

Volledige afleiding van $R_{\theta\theta}$

$$R_{\theta\theta} = \left(\frac{d\Gamma_{\theta\theta}^\sigma}{dx^\sigma} - \frac{d\Gamma_{\theta\sigma}^\sigma}{dx^\theta} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{\theta\theta}^\lambda - \Gamma_{\theta\lambda}^\sigma \Gamma_{\theta\sigma}^\lambda \right)$$

We nemen $\mu = \nu = \theta$. Ook hier splitsen we in vier termen.

$$1. \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^\sigma}{\partial x^\sigma}$$

Alleen $\sigma = r$ draagt bij omdat $\Gamma_{\theta\theta}^\sigma = -re^{-\lambda}$ (zie 5d). Dus

$$\frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^\sigma}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^r}{\partial x^r} = \frac{\partial(-re^{-\lambda})}{\partial x^r} = -e^{-\lambda} + re^{-\lambda} \lambda'$$

(Uitgewerkt: $\frac{\partial(-re^{-\lambda})}{\partial x^r} = -e^{-\lambda} + (-r)(-e^{-\lambda})\lambda' = -e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\lambda'$.)

$$2. -\frac{\partial \Gamma_{\theta\sigma}^\sigma}{\partial x^\theta}$$

Alleen $\sigma = \phi$ draagt bij omdat $\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta$ (zie 5h). Dus

$$-\frac{\partial \Gamma_{\theta\phi}^\phi}{\partial x^\theta} = -\frac{\partial \cot \theta}{\partial x^\theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$3. \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{\theta\theta}^\lambda$$

Voor $\lambda = r$ is $\Gamma_{\theta\theta}^r = -re^{-\lambda}$, dus

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{\theta\theta}^\lambda &= \Gamma_{\sigma r}^\sigma \Gamma_{\theta\theta}^r = \left(\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi r}^\phi \right) \Gamma_{\theta\theta}^r \\ &= \left(\frac{1}{2} v' + \frac{1}{2} \lambda' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \Gamma_{\theta\theta}^r = \left(\frac{1}{2} (v' + \lambda') + \frac{2}{r} \right) \cdot (-re^{-\lambda}) \end{aligned}$$

Na uitwerking:

$$= -\frac{1}{2} re^{-\lambda} (v' + \lambda') - 2e^{-\lambda}$$

$$4. -\Gamma_{\theta\lambda}^\sigma \Gamma_{\theta\sigma}^\lambda$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\lambda}^\sigma \Gamma_{\theta\sigma}^\lambda &= \Gamma_{\theta t}^t \Gamma_{\theta t}^t + \Gamma_{\theta r}^r \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\theta t}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\theta t}^\phi \\ &\quad + \Gamma_{\theta t}^r \Gamma_{\theta r}^t + \Gamma_{\theta r}^r \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\theta r}^\phi \\ &\quad + \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^t + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\phi \\ &\quad + \Gamma_{\theta t}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^t + \Gamma_{\theta r}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\theta\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\theta\sigma}^{\lambda} &= 0 + 0 + 0 + 0 \\
&+ 0 + 0 + (-re^{-\lambda})\left(\frac{1}{r}\right) + 0 \\
&+ 0 + \left(\frac{1}{r}\right)(-re^{-\lambda}) + 0 + 0 \\
&+ 0 + 0 + 0 + \cot^2 \theta \\
\Gamma_{\theta\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\theta\sigma}^{\lambda} &= 2(-re^{-\lambda})\left(\frac{1}{r}\right) + \cot^2 \theta \\
-\Gamma_{\theta\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\theta\sigma}^{\lambda} &= 2(re^{-\lambda})\left(\frac{1}{r}\right) - \cot^2 \theta = 2e^{-\lambda} - \cot^2 \theta
\end{aligned}$$

De relevante niet-nul producten zijn (kort opschrijven):

- $-\Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{\theta r}^{\theta} = -(-re^{-\lambda}) \cdot \frac{1}{r} = e^{-\lambda}$.
- Daarnaast komt er een hoekterm $-\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = -(\cot \theta)^2$. Deze hoekterm combineert met de bijdrage uit stap 2 en met trigonometrische identiteiten (afkomstig uit de sferische maatfactoren) en levert uiteindelijk de gebruikelijke geometrische constante 1 in de volledige expressie; kortom: de hoekbijdragen en $\frac{\partial}{\partial x^{\theta}}$ -bijdragen zetten zichzelf om in de bekende sferische bijdrage.

5. Sommeer alles (radiale + hoekdelen)

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= (-e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\lambda') + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta}\right) + \left(-\frac{1}{2}re^{-\lambda}(v' + \lambda') - 2e^{-\lambda}\right) + (2e^{-\lambda} - \cot^2 \theta) \\
&= 1 - e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\lambda' - \frac{1}{2}re^{-\lambda}(v' + \lambda') \\
&= 1 + e^{-\lambda} \left(-1 + r\lambda' - \frac{1}{2}r(v' + \lambda')\right) \\
&= 1 - e^{-\lambda} \left(1 - r\lambda' + \frac{1}{2}r(v' + \lambda')\right) \\
R_{\theta\theta} &= 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2}(v' - \lambda')\right)
\end{aligned}$$

Volledige afleiding van $R_{\phi\phi}$

$$R_{\phi\phi} = \left(\frac{d\Gamma_{\phi\phi}^{\sigma}}{dx^{\sigma}} - \frac{d\Gamma_{\phi\sigma}^{\sigma}}{dx^{\phi}} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\phi\phi}^{\lambda} - \Gamma_{\phi\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\phi\sigma}^{\lambda} \right)$$

We nemen $\mu = \nu = \phi$. Ook hier splitsen we in vier termen.

$$1. \frac{\partial \Gamma_{\phi\phi}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}}$$

Alleen $\sigma = r$ en $\sigma = \theta$ draagt bij omdat $\Gamma_{\phi\phi}^{\sigma} = -re^{-\lambda} \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta$ (zie 5e en 5g). Dus

$$\frac{\partial \Gamma_{\phi\phi}^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial \Gamma_{\phi\phi}^r}{\partial x^r} + \frac{\partial \Gamma_{\phi\phi}^{\theta}}{\partial x^{\theta}} = \frac{\partial(-re^{-\lambda} \sin^2 \theta)}{\partial x^r} + \frac{\partial(-\sin \theta \cos \theta)}{\partial x^{\theta}} = -e^{-\lambda} \sin^2 \theta (1 - r\lambda') - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$2. -\frac{\partial \Gamma_{\phi\sigma}^{\sigma}}{\partial x^{\phi}}$$

Levert geen relevante bijdragen:

$$-\frac{\partial \Gamma_{\phi\sigma}^{\sigma}}{\partial x^{\phi}} = 0$$

$$3. \Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\phi\phi}^{\lambda}$$

Voor $\lambda = r$ en $\lambda = \theta$ is $\Gamma_{\phi\phi}^r = -re^{-\lambda} \sin^2 \theta$ en $\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta$, dus

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\phi\phi}^{\lambda} &= \Gamma_{\sigma r}^{\sigma} \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\sigma\theta}^{\sigma} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \left(\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^{\theta} + \Gamma_{\phi r}^{\phi} \right) \Gamma_{\phi\phi}^r + \left(\Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \right) \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \\ &= \left(\frac{1}{2} \nu' + \frac{1}{2} \lambda' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \Gamma_{\phi\phi}^r + (\cot \theta) \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \left(\frac{1}{2} (\nu' + \lambda') + \frac{2}{r} \right) \cdot (-re^{-\lambda} \sin^2 \theta) + (\cot \theta) \cdot (-\sin \theta \cos \theta) \end{aligned}$$

Werk uit:

$$\Gamma_{\sigma\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\phi\phi}^{\lambda} = -e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left(\frac{r(\nu' + \lambda')}{2} + 2 \right) - \cos^2 \theta$$

$$4. -\Gamma_{\phi\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\phi\sigma}^{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\phi\sigma}^{\lambda} &= \Gamma_{\phi t}^t \Gamma_{\phi t}^t + \Gamma_{\phi r}^r \Gamma_{\phi t}^r + \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} \Gamma_{\phi t}^{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} \Gamma_{\phi t}^{\phi} \\ &+ \Gamma_{\phi t}^r \Gamma_{\phi r}^t + \Gamma_{\phi r}^r \Gamma_{\phi r}^r + \Gamma_{\phi\theta}^r \Gamma_{\phi r}^{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{\phi r}^{\phi} \\ &+ \Gamma_{\phi t}^{\theta} \Gamma_{\phi\theta}^t + \Gamma_{\phi r}^{\theta} \Gamma_{\phi\theta}^r + \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \\ &+ \Gamma_{\phi t}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^t + \Gamma_{\phi r}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^r + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\theta\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\theta\sigma}^{\lambda} = 0 + 0 + 0 + 0$$

$$+0 + 0 + 0 + (-re^{-\lambda} \sin^2 \theta) \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$+0 + 0 + 0 + (-\sin \theta \cos \theta)(\cot \theta)$$

$$+0 + \left(\frac{1}{r} \right) (-re^{-\lambda} \sin^2 \theta) + (\cot \theta)(-\sin \theta \cos \theta) + 0$$

$$\Gamma_{\phi\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\phi\sigma}^{\lambda} = 2(-re^{-\lambda} \sin^2 \theta) \left(\frac{1}{r} \right) + 2(-\sin \theta \cos \theta)(\cot \theta)$$

$$-\Gamma_{\phi\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\phi\sigma}^{\lambda} = 2(e^{-\lambda} \sin^2 \theta) + 2 \cos^2 \theta = 2(e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

5. Sommeer alles (radiale + hoekdelen)

$$R_{\phi\phi} = (-e^{-\lambda} \sin^2 \theta (1 - r\lambda') - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \left(-e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left(\frac{r(\nu' + \lambda')}{2} + 2 \right) - \cos^2 \theta \right) + 2(e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$R_{\phi\phi} = (-e^{-\lambda} \sin^2 \theta (1 - r\lambda') + \sin^2 \theta) - \left(e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left(\frac{r(v' + \lambda')}{2} + 2 \right) \right) + 2(e^{-\lambda} \sin^2 \theta)$$

$$R_{\phi\phi} = -\sin^2 \theta e^{-\lambda} (1 - r\lambda') + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta e^{-\lambda} \left(\frac{r(v' + \lambda')}{2} + 2 \right) + 2(e^{-\lambda} \sin^2 \theta)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta e^{-\lambda} \left(-1 + r\lambda' - \frac{r(v' + \lambda')}{2} - 2 + 2 \right) + \sin^2 \theta$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta + \sin^2 \theta e^{-\lambda} \left(-1 + r\lambda' - \frac{r(v' + \lambda')}{2} \right)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta e^{-\lambda}}{2} (r\lambda' - rv' - 2)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \left(1 + \frac{e^{-\lambda}}{2} (r\lambda' - rv' - 2) \right)$$

Nu was:

$$R_{\theta\theta} = 1 + \frac{e^{-\lambda}}{2} (r\lambda' - rv' - 2)$$

Dus inderdaad is

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$$

Opmerking

De hier afgegeven uitwerkingen zijn precies de standaardafleidingen die je in alle GR-teksten vindt; ze zijn gecontroleerd op consistentie met $G_{\mu\nu}$ en geven na substitutie van $e^{-\lambda} = 1 - 2Gm/(c^2 r)$ de gebruikelijke vormen voor de Einstein-vergelijkingen (waaruit o.a. de massafunctie en, de hieronder genoemde, TOV volgen).

Ricci-Scalar

De Ricci-scalar is:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi}$$

Vanuit hierboven weten we dat:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

Aangezien $R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$, en $g^{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$, geldt:

$$g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta R_{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2} R_{\theta\theta} = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta}$$

En:

$$R_{tt} = \frac{1}{2} e^{v-\lambda} \left[v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2v'}{r} \right]$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} v' \lambda' - \frac{2}{r} \lambda' \right)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$$

Dus:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} + 2g^{\theta\theta} R_{\theta\theta}$$

$$R = e^{-v} R_{tt} - e^{-\lambda} R_{rr} - \frac{2}{r^2} R_{\theta\theta}$$

$$R = e^{-v} \left[\frac{1}{2} e^{v-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2v'}{r} \right) \right] - e^{-\lambda} \left[-\frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} v' \lambda' - \frac{2}{r} \lambda' \right) \right] - \frac{2}{r^2} \left[1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) \right]$$

$$R = \left[\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2v'}{r} \right) \right] - e^{-\lambda} \left[-\frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} v' \lambda' - \frac{2\lambda'}{r} \right) \right] - \frac{2}{r^2} \left[1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) \right]$$

$$R = e^{-\lambda} \left[\frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2v'}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} v' \lambda' - \frac{2\lambda'}{r} \right) \right] - \frac{2}{r^2} \left[1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) \right]$$

$$R = e^{-\lambda} \left[\frac{1}{2} \left(2v'' + (v')^2 - \lambda' v' + \frac{2v'}{r} - \frac{2\lambda'}{r} \right) \right] - \frac{2}{r^2} \left[1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) \right]$$

$$R = e^{-\lambda} \left[\left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{(v' - \lambda')}{r} \right) \right] - \frac{2}{r^2} \left[1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) \right]$$

$$R = e^{-\lambda} \left[\left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{(v' - \lambda')}{r} \right) + \frac{2}{r^2} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) \right] - \frac{2}{r^2}$$

$$R = e^{-\lambda} \left[v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} + \frac{2}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2}$$

$$R = e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} \right) + \frac{2}{r^2} e^{-\lambda} - \frac{2}{r^2}$$

$$R = e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} \right) + \frac{2(e^{-\lambda} - 1)}{r^2}$$

Samenvatting

Dus de relevante componenten van de Ricci-tensor zijn:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{1}{2} e^{v-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2v'}{r} \right) \\
R_{rr} &= -\frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' - \frac{2\lambda'}{r} \right) \\
R_{\theta\theta} &= 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}
\end{aligned} \tag{6}$$

De Ricci-scalar is:

$$R = e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} \right) + \frac{2(e^{-\lambda} - 1)}{r^2} \tag{7}$$

Appendix 5.4 Einstein-vergelijkingen expliciet

Invullen van (6) en (7) in (4) geeft de drie onafhankelijke vergelijkingen:

(i) tt-component:

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= R_{tt} - \frac{1}{2} R g_{tt} = \frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 e^v) \\
G_{tt} &= \frac{1}{2} e^{v-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2v'}{r} \right) - \frac{1}{2} e^v \left[e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} \right) + \frac{2(e^{-\lambda} - 1)}{r^2} \right] \\
G_{tt} &= \frac{1}{2} e^{v-\lambda} \left(\frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{2} e^v \left[\frac{2(e^{-\lambda} - 1)}{r^2} \right] = \frac{\lambda'}{r} e^{v-\lambda} - \frac{1}{r^2} e^{v-\lambda} + \frac{1}{r^2} e^v = \frac{1}{r^2} e^{v-\lambda} (r\lambda' - 1) + \frac{e^v}{r^2} = \\
&= \frac{e^v}{r^2} [e^{-\lambda} (r\lambda' - 1) + 1] = \frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 e^v) \\
\Rightarrow \frac{1}{r^2} [1 + e^{-\lambda} (r\lambda' - 1)] &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \\
\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})] &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho
\end{aligned} \tag{8}$$

Uitwerken van (8) geeft:

$$\frac{1}{r^2} [(1 - e^{-\lambda}) + r e^{-\lambda} \lambda'] = \frac{1}{r^2} [1 + e^{-\lambda} (r\lambda' - 1)] = \frac{8\pi G}{c^2} \rho$$

(8) is dus identiek aan het voorgaande.

(ii) rr-component:

$$\begin{aligned}
G_{rr} &= R_{rr} - \frac{1}{2} R g_{rr} = \frac{8\pi G}{c^4} p e^{\lambda} \\
G_{rr} &= \left[-\frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' - \frac{2\lambda'}{r} \right) \right] - \frac{1}{2} (-e^{\lambda}) \left[e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} \right) + \frac{2(e^{-\lambda} - 1)}{r^2} \right] \\
&= \left[-\frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' - \frac{2\lambda'}{r} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} \right) + \frac{2(e^{-\lambda} - 1)}{r^2} e^{\lambda} \right] \\
&= \left[-\frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' - \frac{2\lambda'}{r} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} \right) + \frac{(e^{-\lambda} - 1)}{r^2} e^{\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2(v' - \lambda')}{r} + \frac{2\lambda'}{r} \right) \right] + \frac{(1 - e^\lambda)}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} p e^\lambda \\
&= \frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} (1 - e^\lambda) = \frac{8\pi G}{c^4} p e^\lambda \\
&\frac{v'}{r} e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2} (e^{-\lambda} - 1) = \frac{8\pi G}{c^4} p
\end{aligned} \tag{9}$$

(iii) $\theta\theta$ -component:

$$\begin{aligned}
G_{\theta\theta} &= R_{\theta\theta} - \frac{1}{2} R g_{\theta\theta} = \frac{8\pi G}{c^4} p r^2 \\
G_{\theta\theta} &= 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) - \frac{1}{2} (-r^2) \left[e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} \right) + \frac{2(e^{-\lambda} - 1)}{r^2} \right] \\
&= 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) + \frac{1}{2} r^2 \left[e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} \right) + \frac{2(e^{-\lambda} - 1)}{r^2} \right] \\
&= 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) + \left[\frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{2(v' - \lambda')}{r} \right) + r e^{-\lambda} (v' - \lambda') + (e^{-\lambda} - 1) \right] \\
&= 1 - e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right) + \left[\frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' \right) - 1 + e^{-\lambda} (1 + r(v' - \lambda')) \right] \\
&= \frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' \right) + 1 + -e^{-\lambda} - \frac{r}{2} e^{-\lambda} (v' - \lambda') - 1 + e^{-\lambda} + r e^{-\lambda} (v' - \lambda') \\
&= \frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{1}{r} (v' - \lambda') \right) = \frac{8\pi G}{c^4} p r^2 \\
&\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} \lambda' v' + \frac{1}{r} (v' - \lambda') \right) = \frac{8\pi G}{c^4} p
\end{aligned} \tag{10}$$

Toelichting

De drie vergelijkingen zijn niet onafhankelijk: (10) volgt wiskundig uit (8), (9) en de energiebehoudsvergelijking $\nabla_\mu T^{\mu r} = 0$. Hierdoor kunnen we ons beperken tot (8) en (9) voor de afleiding van $\lambda(r)$, $v(r)$, en $p(r)$.

Appendix 5.5 Integratie van de eerste vergelijking

Integratie van (8) levert:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})] &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \\
\frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})] &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho r^2 \\
\int \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})] dr &= \int \frac{8\pi G}{c^2} \rho r^2 dr \\
r(1 - e^{-\lambda}) &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho r^3
\end{aligned}$$

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho r^2 \quad (11)$$

met

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr' = \frac{4}{3} \pi \rho r^3$$

resulteert dit in:

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \quad (12)$$

Toelichting

De functie $m(r)$ vertegenwoordigt de ingesloten massa binnen straal r . Voor $r = R$ geldt $m(R) = M$, wat de continue overgang naar de buiten-Schwarzschild-oplossing garandeert.

Appendix 5.6 Energiebehoud en TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff)-vergelijking

De behoudsvergelijking $\nabla_\mu T^{\mu r} = 0$ geeft:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2}(\rho c^2 + p)v' \quad (13)$$

Gebruik (9) om v' te elimineren:

$$\begin{aligned} \frac{v'}{r} e^{-\lambda} + \frac{1}{r^2}(e^{-\lambda} - 1) &= \frac{8\pi G}{c^4} p \\ v' &= \frac{\frac{8\pi G}{c^4} pr + \frac{1}{r}(1 - e^{-\lambda})}{e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Volgens (12) is:

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \quad \text{en} \quad 1 - e^{-\lambda(r)} = \frac{2Gm(r)}{c^2 r}$$

Ingevuld in de vorige vergelijking krijgen we:

$$v' = \frac{\frac{8\pi G}{c^4} pr + \frac{1}{r} \frac{2Gm}{c^2 r}}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} = \frac{\frac{8\pi G}{c^4} pr + \frac{2Gm}{c^2 r^2}}{\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)} = \frac{\frac{8\pi G}{c^2} pr^3 + 2Gm}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)} = \frac{2G \left(m + \frac{4\pi}{c^2} pr^3\right)}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)}$$

Resultierend in:

$$v' = \frac{2G(m(r) + 4\pi r^3 p/c^2)}{c^2 r^2 (1 - 2Gm(r)/(c^2 r))} \quad (14)$$

Combinatie van (13) en (14) geeft de TOV-vergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -\frac{1}{2}(\rho c^2 + p)v' = -(\rho c^2 + p) \frac{G(m(r) + 4\pi r^3 p/c^2)}{c^2 r^2 (1 - 2Gm(r)/(c^2 r))} \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{(\rho c^2 + p)G \left(m + \frac{4\pi r^3 p}{c^2}\right)}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)} \end{aligned} \quad (15)$$

Toelichting

Vergelijking (15) beschrijft het mechanisch evenwicht tussen de zwaartekracht (neerwaarts) en de gradiënt van de druk (opwaarts). Voor $\rho = \text{constant}$ is dit exact oplosbaar.

Appendix 5.7 Oplossing voor constante dichtheid

Met $m(r) = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$ wordt (15):

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho c^2 + p)(4\pi G r(\rho + 3p/c^2))}{3c^2 \left(1 - \frac{8\pi G \rho r^2}{3c^2}\right)} \quad (16)$$

Definieer:

$$x(r) \equiv \frac{p(r)}{\rho c^2} \Rightarrow p = \rho c^2 x \Rightarrow dp = \rho c^2 dx \quad (16a)$$

Vul dit in (16):

Linkerzijde:

$$\frac{dp}{dr} = \rho c^2 \frac{dx}{dr}$$

Rechterzijde:

$$\rho + \frac{3p}{c^2} = \rho(1 + 3x) \quad \text{en} \quad \rho c^2 + p = \rho c^2(1 + x)$$

Dus:

$$\begin{aligned} &= -\rho c^2(1 + x) \frac{4\pi G r \rho(1 + 3x)}{3c^2(1 - \beta r^2)} \\ &= -\frac{4\pi G \rho}{3} \cdot \frac{r(1 + x)(1 + 3x)\rho c^2}{c^2(1 - \beta r^2)} \\ &= -\frac{4\pi G \rho}{3} \cdot \frac{r(1 + x)(1 + 3x)\rho}{1 - \beta r^2} \end{aligned}$$

We introduceren:

$$\beta \equiv \frac{8\pi G}{3c^2} \rho$$

Dus:

$$\frac{\beta}{2} \equiv \frac{4\pi G}{3c^2} \rho$$

Nu de linker en de rechterzijden tezamen, dat geeft:

$$\begin{aligned} \rho c^2 \frac{dx}{dr} &= -\frac{4\pi G \rho}{3} \cdot \frac{r(1 + x)(1 + 3x)}{1 - \beta r^2} \\ \frac{dx}{dr} &= -\frac{4\pi G \rho}{3c^2} \cdot \frac{r(1 + x)(1 + 3x)}{1 - \beta r^2} = -\frac{\beta}{2} \cdot \frac{r(1 + x)(1 + 3x)}{1 - \beta r^2} \end{aligned}$$

Scheiden van de variabelen geeft:

$$\frac{dx}{(1+x)(1+3x)} = -\frac{\beta}{2} \cdot \frac{r}{1-\beta r^2} dr$$

Integreer beide zijden

Linker integraal – partiële integratie:

$$\frac{1}{(1+x)(1+3x)} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3x}$$

Voor de eerste term:

$$\int \frac{-1}{2} \cdot \frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{2} \ln(1+x) + C_1$$

Voor de tweede term:

$$\int \frac{3}{2} \cdot \frac{dx}{1+3x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \ln(1+3x) + C_2 = \frac{1}{2} \ln(1+3x) + C_2$$

Nu samenvoegen:

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+3x)} = -\frac{1}{2} \ln(1+x) + \frac{1}{2} \ln(1+3x) + C_3$$

Of:

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+3x)} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+3x)}{(1+x)} + C_3$$

Rechter integraal:

$$-\frac{\beta}{2} \cdot \int \frac{r}{1-\beta r^2} dr$$

Gebruik $u = 1 - \beta r^2 \Rightarrow du = -2\beta r dr \Rightarrow r dr = -du/(2\beta)$.

Dus:

$$-\frac{\beta}{2} \int \frac{r}{1-\beta r^2} dr = -\frac{\beta}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2\beta}\right) \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln u = \frac{1}{4} \ln(1-\beta r^2)$$

Dus na integratie krijgen we:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{(1+3x)}{(1+x)} = \frac{1}{4} \ln(1-\beta r^2) + C_4$$

$$2 \ln \frac{(1+3x)}{(1+x)} = \ln(1-\beta r^2) + C_5$$

Exponentieer:

$$\left(\frac{1+3x}{1+x}\right)^2 = C_6(1-\beta r^2)$$

De fysische relevante tak is de positieve wortel:

$$\frac{1+3x}{1+x} = C_7 \sqrt{1-\beta r^2}$$

We definiëren $\alpha(r) \equiv \sqrt{1-\beta r^2}$

Dan:

$$\frac{1+3x}{1+x} = C_7 \alpha(r)$$

Bepaal de integratieconstante C_7 door de randvoorwaarde $p(R) = 0$

Bij $r = R$ geldt $p(R) = 0 \Rightarrow x(R) = 0$

$$\frac{1+0}{1+0} = C_7 \alpha(r) \Rightarrow 1 = C_7 a$$

Waar we stellen dat:

$$a \equiv \alpha(R) = \sqrt{1 - \beta R^2} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}$$
$$C_7 = \frac{1}{a}$$

Daarmee wordt:

$$\frac{1+3x}{1+x} = \frac{\alpha(r)}{a}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\alpha(r) - a}{3a - \alpha(r)} \quad (16b)$$

Nu naar:

$$\alpha(R) = \sqrt{1 - \beta R^2},$$
$$\beta = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho$$

Zoals boven gedefinieerd:

$$\alpha(r) = \sqrt{1 - \frac{8\pi G \rho r^2}{3c^2}} = \sqrt{1 - \beta r^2}, \quad a = \alpha(R) = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} \quad (17)$$

Uit (16a en 16b) krijgen we:

$$p(r) = \rho c^2 x = \rho c^2 \frac{\alpha(r) - a}{3a - \alpha(r)} \quad (18)$$

Opmerkingen:

- Voor $r = R$: $\alpha(R) = a \Rightarrow p(R) = 0$
- Voor $r = 0$: $\alpha(0) = 1 \Rightarrow p(0) = \rho c^2 \frac{1-a}{3a-1}$

Toelichting

Deze oplossing voldoet aan $p(R) = 0$ en geeft een eindige centrale druk zolang $3a > 1$. Het verloop van de druk naar nul aan het oppervlak is continu en fysisch correct.

Uit (13) volgt:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{2}{\rho c^2 + p} \frac{dp}{dr} \quad (19)$$

Kettingregel:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{dv}{dp} \frac{dp}{dr} \Rightarrow \frac{dv}{dp} = -\frac{2}{\rho c^2 + p}$$

Integreer in P :

$$v = -2 \ln(\rho c^2 + p) + \ln C' = \ln C' (\rho c^2 + p)^{-2} = \ln \frac{C'}{(\rho c^2 + p)^2}$$

Exponentieer:

$$e^{v/2} = \frac{C''}{\rho c^2 + p} \quad C'' > 0$$

Volgens (18)

$$p(r) = \rho c^2 \frac{\alpha(r) - a}{3a - \alpha(r)}$$

Nu is:

$$\rho c^2 + p = \rho c^2 \left(1 + \frac{\alpha - a}{3a - \alpha}\right) = \rho c^2 \frac{2a}{3a - \alpha(r)}$$

Invullen in $e^{v/2}$:

$$e^{v/2} = \frac{C''}{\rho c^2 + p} = \frac{C''}{\rho c^2} \cdot \frac{3a - \alpha(r)}{2a} \quad (19b)$$

Bepaal de integratieconstante met de randvoorwaarde

Aan het oppervlak $r = R$ geldt $p(R) = 0$ en $\alpha(R) = a$. De metrische component moet daar voldoen aan:

$$e^{v(R)/2} = a = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}$$

Invullen bij $r = R$ geeft:

$$a = \frac{C''}{\rho c^2} \cdot \frac{3a - a}{2a} = \frac{C''}{\rho c^2} \Rightarrow C'' = a \rho c^2$$

Resultaat:

$$\begin{aligned} e^{v/2} &= \frac{a \rho c^2}{\rho c^2} \cdot \frac{3a - \alpha(r)}{2a} \\ e^{v(r)/2} &= \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}\alpha(r) \end{aligned} \quad (20)$$

waarmee de tijdcomponent van de metriek luidt:

$$e^{v(r)/2} = \left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G \rho r^2}{3c^2}} \right) \quad (21)$$

Volledige interne metrieik

De binnenoplossing voor $0 \leq r \leq R$ wordt dan:

$$ds^2 = \left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{8\pi G \rho r^2}{3c^2}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G \rho r^2}{3c^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (22)$$

Met R is de straal van de bol is:

$$M = \frac{4}{3}\pi \rho R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \Rightarrow \frac{8\pi G \rho r^2}{3c^2} = \frac{2GM}{c^2 R} \frac{r^2}{R^2}$$

Ingevuld in (22) geeft dit::

$$ds^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R} \frac{r^2}{R^2}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 R} \frac{r^2}{R^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (22a)$$

Toelichting

Deze metrieik beschrijft de ruimte-tijd binnen een homogene bol. Voor $r = R$ volgt continuïteit met de buiten-Schwarzschild-oplossing:

$$e^{-\lambda(R)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 R}, \quad e^{v(R)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 R}$$

Appendix 5.8 Centrale druk en Buchdahl-limiet

De centrale druk volgt uit $\alpha(0)=1$:

$$p(0) = \rho c^2 \frac{1-a}{3a-1} \quad (23)$$

Zoals boven genoemd in (17)

$$a = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}$$

Wanneer $3a-1=0$, divergeert $p(0)$; dit geeft de **Buchdahl-limiet**:

$$\frac{2GM}{c^2 R} = \frac{8}{9} \quad (24)$$

Toelichting

Deze limiet markeert de maximale compactheid voor een stabiele, statische configuratie met constante dichtheid. Wordt deze overschreden, dan stort de ster in tot een zwart gat.

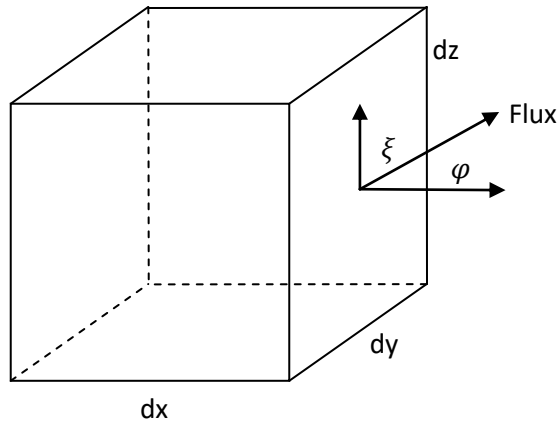
Appendix 5.9 Samenvatting

- De volledige tensorafleiding bevestigt de consistentie van de interne oplossing met de Einstein-vergelijkingen.

- De functies $v(r)$ en $\lambda(r)$ zijn exact bepaalbaar voor $\rho = \text{const.}$.
- De druk $p(r)$ volgt uit de TOV-vergelijking en is continu tot $p(R)=0$.
- De centrale druk divergeert bij de Buchdahl-limiet $2GM/(c^2 R) = 8/9$.
- De interne metriek sluit naadloos aan op de buitenschwarzschild-oplossing.

Appendix 6 Afleiding van de Stelling van Gauss

We beginnen met een kubus van infinitesimaal kleine afmetingen:



Door deze oneindig kleine kubus stroomt een flux F . Deze flux is niet overal hetzelfde en is daarom een functie van x, y, z en t . De flux is een vector, omdat deze zowel een grootte als een richting heeft.

$$Flux = \vec{F}(x, y, z, t) \quad (1)$$

Flux door een oppervlak

Beschouw nu de rechterzijde van de kubus, een vlak evenwijdig aan het y - z -vlak. De flux die door dit oppervlak stroomt, wordt bepaald door de component van $\vec{F}$ die loodrecht op dat vlak staat.

Als ξ de hoek is tussen $\vec{F}$ en het oppervlak, dan geldt:

$$Flux_{rechts} = \vec{F} \sin \xi dy dz \quad (2)$$

We representeren het oppervlak als een vector $d\vec{A}$, die loodrecht op het vlak staat:

$$d\vec{A} = \vec{dy} \times \vec{dz} \quad \text{met grootte} \quad dA = \sin \xi dy dz \quad (3)$$

De flux die door de rechterzijde stroomt is dan:

$$Flux_{rechts} = \vec{F} \sin \xi dy dz = \vec{F} \cos \left(\frac{1}{2} \pi - \xi \right) d\vec{A} = \vec{F} \cos \varphi d\vec{A} = \vec{F} d\vec{A} \cos \varphi \quad (4)$$

De vector $d\vec{A}$ staat loodrecht op het oppervlak en φ is hier de complementaire hoek van ξ . Dus zien we hier het inwendig product:

$$Flux_{rechts} = \vec{F} d\vec{A} \cos \varphi = \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (5)$$

Flux door het totale oppervlak van de kubus

Voor een eindige kubus is de totale flux de som van de bijdragen van elk oppervlak:

$$Flux_{kubus} = \iint_{rechts} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{links} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{voorkant} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{achter} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{onder} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{boven} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (6)$$

Dit kunnen we schrijven als één integraal over het volledige gesloten oppervlak:

$$Flux_{kubus} = \oint_{kubus} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (7)$$

Alternatieve benadering: flux als limiet

We bekijken de netto flux via een differentiële benadering. In de xxx-richting is de flux die binnenkomt:

$$Flux_{links} = F_x dydz \quad (8)$$

Deze flux verlaat de rechterzijde, vermeerderd of verminderd met $d\phi$ vanuit de y- of z-richting:

$$Flux_{rechts} = (F_x + dF_x) dydz \quad (9)$$

Dus, de netto flux in de x-richting wordt dan:

$$Flux_x = Flux_{rechts} - Flux_{links} = (F_x + dF_x) dydz - F_x dydz = dF_x dydz \quad (10)$$

Analoog geldt voor de y- en z-richting:

$$Flux_y = dF_y dx dz \quad (11)$$

$$Flux_z = dF_z dx dy \quad (12)$$

De totale flux door de kubus wordt dan:

$$Flux_{kubus} = Flux_x + Flux_y + Flux_z = dF_x dydz + dF_y dx dz + dF_z dx dy \quad (13)$$

Of, herschreven als partiële afgeleiden:

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial F_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV \end{aligned}$$

De operator $\vec{\nabla}$ is:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (14)$$

De vergelijking (13) wordt dan:

$$Flux_{kubus} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV = (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV \quad (15)$$

Door te integreren over de gehele kubus, vinden we de netto flux door de kubus:

$$Flux_{kubus} = \iiint_{kubus} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV \quad (16)$$

De Stelling van Gauss

Vergelijking (7) en (16) geven beide de flux door de kubus. Hieruit volgt:

$$\oiint_{kubus} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{kubus} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (17)$$

Aangezien het volume willekeurig was (en niet noodzakelijk een kubus), geldt dit voor elk gesloten volume:

$$\oiint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (18)$$

Deze vergelijking staat bekend als de stelling van Gauss.

Bijzondere geval: nul flux

In het bijzondere geval waarin de netto flux door het gesloten oppervlak nul is (niets wordt gegenereerd of verdwijnt binnen het volume):

$$\oiint \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = 0 \quad (19)$$

Daaruit volgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad (20)$$

Dit kan uitgeschreven worden als:

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

In **Einstein-notatie** (met sommatie over herhaalde index α):

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (22)$$

Appendix 7 Afleiding van de Laplace- en Poisson-vergelijkingen

Een vectorveld waarbij het pad tussen twee punten niet uitmaakt voor de benodigde arbeid, wordt een **conservatief veld** genoemd. In zo'n veld kost elke route van punt A naar B dezelfde hoeveelheid energie. Dit impliceert dat er een scalaire potentiaal φ bestaat waarvoor geldt:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi \quad (1)$$

Waarbij de nabla-operator $\vec{\nabla}$ wordt gedefinieerd als:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2)$$

Het zwaartekrachtsveld $\vec{F}_g$ is een voorbeeld van een conservatief veld, zodat:

$$\vec{F}_g = \vec{\nabla} \varphi \quad (3)$$

Volgens de stelling van Gauss geldt voor elk gesloten oppervlak:

$$\oint_A \vec{F}_g \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g dV \quad (4)$$

In vacuüm, waar zich geen massa bevindt, is er geen bron van zwaartekracht, zodat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g = 0 \quad (5)$$

Door nu (3) in (5) te substitueren, krijgen we:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0 \quad (6)$$

of explicieter:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Aangezien x, y, z orthogonaal zijn, blijft over:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Deze uitdrukking wordt ook wel geschreven als:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{of} \quad \Delta \varphi = 0 \quad (8)$$

De operator ∇^2 , genaamd de **Laplaciaan**, is gedefinieerd als:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

In vacuüm geldt dus de **Laplace-vergelijking**:

$$\nabla^2 \varphi \text{ of } \Delta \varphi = 0.$$

In een volume met massa

Binnen een massa is er wél een bron van zwaartekracht. Volgens de gravitatiewet van Newton geldt voor het zwaartekrachtsveld:

$$\vec{F}_g = G \frac{m}{r^2} \hat{r} \quad (9)$$

waar $\hat{r}$ de eenheidsvector in radiale richting is. Pas opnieuw de stelling van Gauss toe:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g dV = \oiint_A \vec{F}_g \cdot d\vec{A} \quad (10)$$

$$\iiint_V \Delta\phi dV = \oiint_A G \frac{m}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{A} = \oiint_A G \frac{m}{r^2} dA$$

De oppervlakte en het volume van een bol zijn respectievelijk:

$$A = 4\pi r^2 \quad (11)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (12)$$

Omdat de straal r van de bol constant blijft over het totale oppervlak van de bol, wordt vergelijking (10):

$$\iiint_V \Delta\phi dV = \oiint_A G \frac{m}{r^2} dA = G \frac{m}{r^2} \oiint_A dA = G \frac{m}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi Gm \quad (13)$$

Met ρ als de massadichtheid:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (14)$$

Dan wordt (13):

$$\iiint_V \Delta\phi dV = 4\pi Gm = 4\pi G \iiint_V \rho dV = \iiint_V 4\pi G\rho dV \implies \Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (15)$$

Dit is de **Poisson-vergelijking**, die van toepassing is in gebieden waar massa aanwezig is.

Samenvatting

- In een gebied met massadichtheid ρ :

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (16)$$

Of:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (\text{Poisson – vergelijking})$$

- In lege ruimte (vacuum):

$$\Delta\phi = 0 \quad (17)$$

Of:

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (\text{Laplace – vergelijking})$$

Overweging

Het bestaan van massa veroorzaakt zwaartekrachtsflux. Wanneer je binnen een massabool bent en naar buiten beweegt, verandert de hoeveelheid ingesloten massa en dus verandert ook de totale flux ($\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$). Wanneer je uiteindelijk buiten de massabool bent, blijft de massa ingesloten en blijft de totale flux constant ($\nabla^2\phi = 0$).

Appendix 7.1 Toepassing van de Laplace-operator op het Zwaartekrachtspotentiaal

In dit hoofdstuk passen we de Laplace-operator toe op het zwaartekrachtspotentiaal, zowel buiten als binnen een statische bol. De relevante formules voor de Newtoniaanse potentiaal zijn afgeleid in [Appendix 7.1.1](#) (buiten een bol) en [Appendix 7.1.2](#) (binnen een bol).

De zwaartekracht volgens Newton is:

$$F = mg = \frac{GmM}{r^2} \Rightarrow \text{zwaartekrachtsveld: } g = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow \text{zwaartekrachtspotentiaal: } \phi_{\text{newton}} = \frac{-GM}{r}$$
$$\text{waarbij } g = \frac{d\phi_{\text{newton}}}{dr}$$

Hier is r de afstand ten opzichte van het centrum van de bol en R is de straal van de bol. M is de massa van de bol en m is de massa van een deeltje.

De zwaartekrachtspotentiaal **buiten** een bol in de algemene relativiteitstheorie is (hoofdstuk 2.8 [vergelijking 5](#)):

$$\phi = g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 + \frac{2\phi_{\text{newton}}}{c^2}$$
$$\Rightarrow \phi_{\text{newton_buiten}} = -\frac{GM}{r} \quad (1)$$

Zwaartekrachtspotentiaal **binnen** een bol (zie afleiding hieronder):

$$\phi = 1 - \frac{3GM}{c^2 R} + \frac{GM}{c^2} \frac{r^2}{R^3} = 1 + \frac{2}{c^2} \cdot \left(-\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3} \right)$$
$$\Rightarrow \phi_{\text{newton_binnen}} = -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3} \quad (2)$$

Zie [Appendix 7.1.4 vergelijking 3](#).

Vervolgens passen we de Laplace-operator toe op de zwaartekrachtspotentiaal buiten en binnen een bol, waarbij geldt:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Appendix 7.1.1 Buiten een Bol (Laplace)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

De afgeleide naar x geeft:

$$\frac{\partial r}{\partial x} \Rightarrow 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

De zwaartekrachtspotentiaal buiten een bol is in de klassieke mechanica gegeven door (Zie [vergelijking 1](#) in [Appendix 7.1](#)):

$$\phi_{\text{newton_buiten}} = -\frac{GM}{r}$$

Eerste afgeleide naar x:

$$\frac{\partial \phi_{\text{newton}}}{\partial x} = \frac{\partial \phi_{\text{newton}}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{GMx}{r^3}$$

Tweede afgeleide naar x:

$$\frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial x^2} = \frac{-3GMx}{r^4} \cdot \frac{x}{r} + \frac{GM}{r^3} = \frac{-3GMx^2}{r^5} + \frac{GM}{r^3}$$

Analoog voor y en z. Dus totaal voor x, y en z geldt:

$$\begin{aligned} \Delta \phi_{\text{newton}} &= \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial z^2} \\ \Delta \phi_{\text{newton}} &= \frac{-3GM}{r^3} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{3GM}{r^3} = \frac{-3GM}{r^3} + \frac{3GM}{r^3} = 0 \end{aligned}$$

Dus:

$$\Delta \phi_{\text{newton}} = 0$$

Buiten een bol zonder massa (vacuüm) voldoet de zwaartekrachtspotential dus aan de Laplace-vergelijking.

Appendix 7.1.2 Binnen een Bol (Poisson)

Zoals hierboven afgeleid:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

De zwaartekrachtspotential binnen een homogene bolmassa is (Zie [vergelijking 2](#) in [Appendix 7.1](#)):

$$\begin{aligned} \phi_{\text{newton_binnen}} &= -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3} \\ \frac{\partial \phi_{\text{newton}}}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_{\text{newton}}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2GM}{2} \frac{r}{R^3} \frac{x}{r} = \frac{GMx}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial x^2} &= \frac{GM}{R^3} \end{aligned}$$

Hetzelfde geldt voor y en z. Dus totaal:

$$\Delta \phi_{\text{newton}} = \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{\text{newton}}}{\partial z^2} = \frac{3GM}{R^3} = \frac{3G \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{R^3} = 4\pi G \rho$$

Binnen de bol voldoet de zwaartekrachtspotential dus aan de **Poisson-vergelijking**:

$$\Delta \phi_{\text{newton}} = 4\pi G \rho \quad (3)$$

Dus:

$$\emptyset = 1 + \frac{2\emptyset_{newton}}{c^2} \Rightarrow \Delta\emptyset = \frac{2}{c^2} \Delta\emptyset_{newton} = \frac{2}{c^2} 4\pi G\rho = \frac{8\pi G\rho}{c^2}$$

$$\Delta\emptyset = \frac{8\pi G\rho}{c^2}$$

Appendix 7.1.3 Vereenvoudiging van de Toepassing van de Laplace-/Poisson-operator

Laten we aannemen dat we een functie $f(r)$ hebben waarop de Laplace-operator wordt toegepast.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Gradiënt van $f(r)$:

$$\nabla f(r) = \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}, \frac{\partial f(r)}{\partial y}, \frac{\partial f(r)}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\vec{x}}{r} \quad (1)$$

De gradiënt van $f(r)$:

$$\nabla f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r} + \frac{\vec{y}}{r} + \frac{\vec{z}}{r} \right) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \hat{r}$$

Verdere differentiatie van (1):

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{x}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right)$$

Nu voor x, y, en z:

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \right)$$

De Laplace-/Poisson-vergelijking:

$$\Delta f(r) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial f(r)}{\partial r} \quad (2)$$

Laten we de algemene vorm van $\emptyset_{newton}$ nemen:

$$\emptyset_{newton} = L + Kr^n \quad (3)$$

Waarbij L en K constanten zijn.

$$\frac{\partial \phi_{newton}}{\partial r} = nKr^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{newton}}{\partial r^2} = n(n-1)Kr^{n-2}$$

Daarom, volgens vergelijking (2):

$$\Delta \phi_{newton} = n(n-1)Kr^{n-2} + \frac{2}{r} \cdot nKr^{n-1} = n(n-1)Kr^{n-2} + 2nKr^{n-2}$$

$$\Delta \phi_{newton} = n(n+1)Kr^{n-2} \quad (4)$$

Laten we deze formule toepassen op de gravitatiepotentialen buiten en binnen een bol.

Outside a sphere:

$$\phi_{newton} = -\frac{GM}{r}$$

Dus, volgens (3)

$$\phi_{newton} = L + Kr^n$$

Waarbij $n = -1$, $L = 0$ en $K = -GM$. Dan volgens (4):

$$\Delta \phi_{newton} = -1(-1+1)GMr^{-1-2} = 0 \cdot GMr^{-3} = 0$$

Binnen een bol:

$$\phi_{newton} = -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3}$$

Dus, volgens (3)

$$\phi_{newton} = L + Kr^n$$

Waarbij $n = +2$, $L = -3GM/2R$ en $K = GM/2R^3$

$$\Delta \phi_{newton} = +2(2+1) \frac{GM}{2R^3} r^{2-2} = 6 \frac{GM}{2R^3} = \frac{3GM}{R^3} = \frac{3G \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{R^3} = 4\pi G \rho$$

Dit komt overeen met de berekeningen in het vorige hoofdstuk.

Verder kan worden gezien dat $\Delta \phi_{newton}$ nul is wanneer $n=0$ of -1 , en uiteraard wanneer r naar oneindig gaat terwijl $n < 2$.

Appendix 7.1.4 Afleiding van de Gravitatiepotentiaal Binnen een Statische Bol

De gravitatiepotentiaal binnen een statische bol zal worden afgeleid op basis van de Poisson-vergelijking:

$$\Delta\phi_{newton} = 4\pi G\rho.$$

En de algemene vorm van ϕ_{newton} :

$$\phi_{newton} = L + Kr^n$$

Met formule (4) die hierboven is afgeleid:

$$\Delta\phi_{newton} = n(n+1)Kr^{n-2} \quad (2)$$

Hieruit volgt:

$$4\pi G\rho = n(n+1)Kr^{n-2}$$

Dit geeft aan dat bij $n=2$, geldt:

$$6K = 4\pi G\rho \Rightarrow K = \frac{2}{3}\pi G\rho = \frac{2}{3}\pi G \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{2} \frac{GM}{R^3}$$

Dus het gravitatiepotentiaal binnen een statische bol is:

$$\Rightarrow \phi_{newton} = L + \frac{2}{3}\pi G\rho r^2$$

Op het oppervlak van de bol, waar geldt $r=R$:

$$\phi_{newton} = -\frac{GM}{R}$$

Voor een continue overgang van ϕ op het oppervlak van de bol (bij $r=R$), moet het buitenste gravitatiepotentiaal gelijk zijn aan het binnenste gravitatiepotentiaal:

$$\phi_{newton} = -\frac{GM}{R} = -\frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{R} G\rho = -\frac{4}{3}\pi R^2 G\rho = L + \frac{2}{3}\pi G\rho R^2$$

Dit geeft:

$$L = -\frac{4}{3}\pi R^2 G\rho - \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 = -\frac{6}{3}\pi R^2 G\rho = -\frac{6}{3}\pi R^2 G \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = -\frac{3}{2} \frac{MG}{R}$$

De gravitatiepotentiaal binnen de bol wordt dan:

$$\phi_{newton} = L + \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 = L + \frac{2}{3}\pi G r^2 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = L + \frac{1}{2} \frac{GM}{R^3} r^2$$

Dus:

$$\phi_{newton} = -\frac{3}{2} \frac{MG}{R} + \frac{1}{2} \frac{GM}{R^3} r^2$$

De versnelling g_r is de afgeleide van ϕ_{newton} ten opzichte van r :

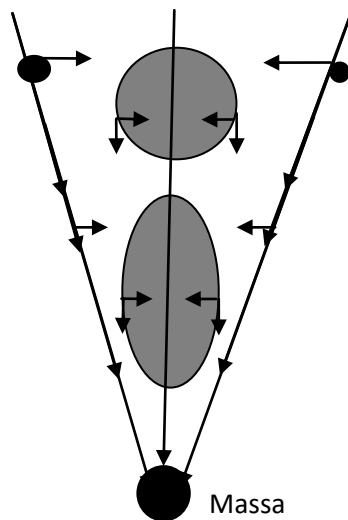
$$g_r = \frac{d\phi_{newton}}{dr} = \frac{GM}{R^3} r$$

Bij $r = 0$ is de versnelling $g_r = 0$ en bij $r=R$ is de versnelling $g_r = \frac{GM}{R^2}$.

Gravitatiepotentiaal binnen de bol:

$$\phi = 1 + \frac{2\phi_{\text{newton}}}{c^2} = 1 - \frac{3MG}{c^2 R} + \frac{GM}{c^2 R^3} r^2 \quad (3)$$

Appendix 8 Getijdenkrachten



Getijdenkrachten

De lijnen van het gravitatieveld, veroorzaakt door een massa, zijn niet parallel maar gericht naar het centrum van de massa. De grootte van de kracht is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot het centrum van de massa. De gravitatiekrachten op het grijze lichaam kunnen worden opgesplitst in horizontale en verticale componenten. Het grijze lichaam wordt samengedrukt door de horizontale componenten van de kracht, en het lichaam wordt verticaal uitgerekt doordat het gravitatieveld toeneemt naarmate we dichterbij de massa komen.

Dus, aangezien de lijnen van het gravitatieveld radiaal gericht zijn, wordt de kracht een getijdenkracht genoemd.

In het geval van een "zwart gat" zijn de krachten zo enorm dat het grijze lichaam zodanig wordt uitgerekt dat dit fenomeen "spaghettificatie" wordt genoemd.

Appendix 9 Speciale Relativiteitstheorie

In de Speciale Relativiteitstheorie beschouwde Einstein alleen coördinatenstelsels die uniform bewogen, dus met constante snelheid ten opzichte van elkaar; de invloed van massa's, en dus zwaartekracht, werd niet meegenomen. De aannames waarop de Speciale Relativiteitstheorie is gebaseerd, zijn:

- De maximaal mogelijke snelheid, in elk coördinatenstelsel, is de lichtsnelheid $c=299\,792\,458$ m/s.
- De natuurwetten zijn geldig in elk uniform bewegend coördinatenstelsel.

In de benadering van Newton waren de tijdsintervallen gelijk in het "ruststelsel" en in het bewegende stelsel. Echter, via de Speciale Relativiteitstheorie werd aangetoond dat de **tijdsintervallen** in een bewegend stelsel anders en kleiner zijn dan in een ruststelsel. Bovendien wordt de **lengte van een object** beïnvloed door zijn snelheid en neemt af, ten opzichte van het ruststelsel, in de bewegingsrichting.

Beide waren gevolgen van de waarneming dat de lichtsnelheid in vacuüm altijd hetzelfde is in elk stelsel, ongeacht de snelheid van het stelsel.

In dit hoofdstuk vatten we een aantal punten samen die vaak worden gebruikt in de Speciale Relativiteitstheorie (SR) en die relevant zijn voor de toepassing in de algemene relativiteitstheorie.

We beginnen met het vaststellen van de relatie tussen twee coördinatenstelsels die met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen. Deze relatie staat bekend als de Lorentztransformatie, waarvan de afleiding hieronder wordt getoond.

Appendix 9.1 Eenvoudige Afleiding van de Lorentztransformatie

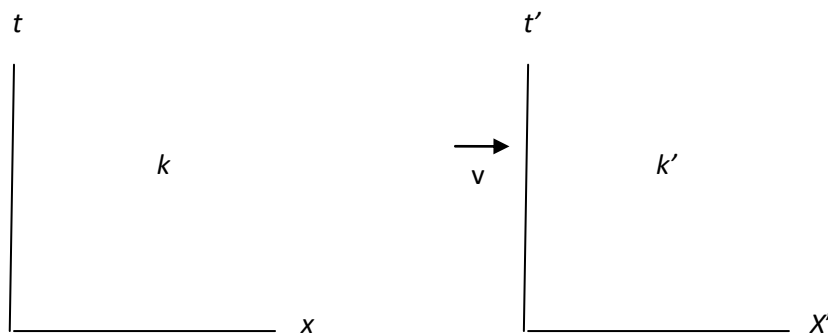


Fig. 1

Coördinaat systeem k' beweegt uniform met een snelheid v ten opzichte van coördinaat systeem k .

We nemen twee coördinatensystemen waarvan de oorsprongen zich met een constante snelheid v , ten opzichte van elkaar bewegen, respectievelijk in de x en x' richting. Hoewel de coördinatensystemen vierdimensionaal zijn (t, x, y, z) worden alleen de t - en x -assen getekend omwille van de eenvoud, omdat er geen beweging is in de y - en z -richtingen.

Een lichtsignaal wordt uitgezonden op tijd $t = t' = 0$ in de richting van de positieve x -as, volgens de vergelijking:

$$x = ct$$

Of:

$$x - ct = 0 \quad (1)$$

Aangezien hetzelfde lichtsignaal met de snelheid c wordt uitgezonden ten opzichte van k' , zal de voortplanting ten opzichte van het systeem k' worden weergegeven door de analoge formule:

$$x' - ct' = 0 \quad (2)$$

Die ruimte-tijdpunten (gebeurtenissen) die aan (1) voldoen, moeten ook aan (2) voldoen. Dit is duidelijk het geval wanneer de relatie:

$$(x' - ct') = \lambda(x - ct) \quad (3)$$

algemeen geldt, waarbij λ een constante aanduidt; want volgens (3) leidt het verdwijnen van $(x - ct)$ tot het verdwijnen van $(x' - ct')$ voor iedere waarde van λ .

Als we soortgelijke overwegingen toepassen op lichtstralen die langs de negatieve x -as worden uitgezonden, verkrijgen we de voorwaarde:

$$(x' + ct') = \mu(x + ct) \quad (4)$$

Door vergelijkingen (3) en (4) op te tellen (of af te trekken) en de constanten a en b in te voeren in plaats van λ en μ , waarbij:

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

en

$$b = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

verkrijgen we de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bx \end{aligned} \quad (5)$$

We zouden dus de oplossing van ons probleem hebben als de constanten a en b bekend waren. Deze volgen uit de volgende discussie.

Voor de oorsprong van k' geldt permanent $x' = 0$, en daarom hebben we volgens de eerste van de vergelijkingen (5)

$$x = \frac{bc}{a}t$$

Als we v de snelheid noemen waarmee de oorsprong van k' beweegt ten opzichte van k , dan hebben we:

$$v = \frac{bc}{a} \quad (6)$$

Dezelfde waarde v kan worden verkregen uit vergelijking (5), als we de snelheid van een ander punt van k' ten opzichte van k berekenen, of de snelheid (gericht naar de negatieve x -as) van een punt van k ten opzichte van k' . Kortom, we kunnen v aanduiden als de relatieve snelheid van de twee systemen.

Bovendien leert het relativiteitsprincipe ons dat, zoals beoordeeld vanuit k , de lengte van een meetlat die in rust is ten opzichte van k' , precies hetzelfde moet zijn als de lengte, zoals beoordeeld vanuit k' , van een meetlat die in rust is ten opzichte van k . Om te zien hoe de punten op de x' -as er vanuit k uitzien, hoeven we alleen maar een "momentopname" te maken van k' vanuit k ; dit betekent dat we een bepaalde waarde van t (de tijd van k) moeten invoeren, bijvoorbeeld $t=0$. Voor deze waarde van t verkrijgen we dan uit de eerste van de vergelijkingen (5):

$$x' = ax$$

Twee punten op de x' -as, die gescheiden zijn door de afstand $x'=L$ wanneer gemeten in het k' -systeem, zijn dus in onze momentopname gescheiden door de afstand:

$$\Delta x = \frac{L}{a} \quad (7)$$

Maar als de momentopname wordt gemaakt vanuit $k'(t'=0)$, en als we t elimineren uit de vergelijkingen (5), rekening houdend met de uitdrukking (6), krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= act - bx \\ t &= \frac{b}{ac} x \\ x' &= ax - bct = ax - \frac{b^2}{a} x = ax \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

Uit (6) krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{v}{c} \\ \Rightarrow x' &= a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x \end{aligned} \quad (7a)$$

Hieruit concluderen we dat twee punten op de x -as, gescheiden door de afstand L (ten opzichte van k), in onze momentopname worden weergegeven door de afstand:

$$\Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) L \quad (7b)$$

Maar uit wat is gezegd, moeten de twee momentopnamen identiek zijn; dus Δx in (7) moet gelijk zijn aan $\Delta x'$ in (7b), zodat we verkrijgen:

$$\begin{aligned} \Delta x = \frac{L}{a} &= \Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) L \\ \frac{1}{a} &= a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (7c)$$

De vergelijkingen (6) en (7c) bepalen de constanten a en b . Door de waarden van deze constanten in te voegen in (5), verkrijgen we de vergelijkingen:

$$x' = ax - bct = ax - avt = a(x - vt)$$

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
ct' &= act - bx = act - \frac{av}{c}x = ac \left(t - \frac{v}{c^2}x \right) \\
t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned} \tag{8}$$

Zo hebben we de Lorentztransformatie verkregen voor gebeurtenissen op de x-as.
Deze voldoet aan de voorwaarde:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 \tag{8a}$$

De uitbreiding van dit resultaat om gebeurtenissen buiten de x- as op te nemen, wordt verkregen door de vergelijkingen (8) te behouden en aan te vullen met de relaties:

$$\begin{aligned}
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned} \tag{9}$$

Op deze manier voldoen we aan het postulaat van de constante lichtsnelheid *in vacuo* voor lichtstralen in willekeurige richtingen, zowel voor het systeem *k* als voor het systeem *k'*. Dit kan als volgt worden aangetoond.

We veronderstellen dat een lichtsignaal wordt uitgezonden vanuit de oorsprong van *k* op het tijdstip $t = 0$. Het zal zich voortplanten volgens de vergelijking:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$$

Of, als we deze vergelijking kwadrateren, volgens de vergelijking:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \tag{10}$$

Volgens de wet van voortplanting van licht, in combinatie met het relativiteitspostulaat, moet de overdracht van het betreffende signaal - beoordeeld vanuit *K'*- plaatsvinden volgens de overeenkomstige formule:

$$r' = ct'$$

Of,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \tag{10a}$$

Om ervoor te zorgen dat vergelijking (10a) een gevolg is van vergelijking (10), moeten we hebben:

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) = \sigma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) \tag{11}$$

Aangezien vergelijking (8a) moet gelden voor punten op de x-s, hebben we dus $\sigma = 1$; want (11) is een gevolg van (8a) en (9), en dus ook van (8) en (9). Zo hebben we de Lorentztransformatie afgeleid.

De Lorentztransformatie, weergegeven door (8) en (9), moet nog worden gegeneraliseerd. Het is duidelijk dat het niet uitmaakt of de assen van *k'* zo worden gekozen dat ze ruimtelijk parallel zijn aan die van *k*. Het is ook niet essentieel dat de snelheid van de translatie van *k'* ten opzichte van *k* in de richting van de x-as ligt. Een eenvoudige overweging toont aan dat we in staat zijn om de Lorentztransformatie in deze algemene zin te construeren uit twee soorten transformaties, namelijk uit Lorentztransformaties in de specifieke zin en uit puur ruimtelijke transformaties, wat overeenkomt met de vervanging van het rechthoekige coördinatensysteem door een nieuw systeem met zijn assen in andere richtingen.

Wiskundig kunnen we de gegeneraliseerde Lorentztransformatie als volgt karakteriseren: het drukt x', y', z', t' uit in termen van lineaire homogene functies van x, y, z, t , van een zodanige aard dat de relatie:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (11a)$$

wordt voldaan. Dat wil zeggen: als we hun uitdrukkingen in x, y, z, t , vervangen in plaats van x', y', z', t' , aan de linkerkant, komt de linkerkant van (11a) overeen met de rechterkant.

We kunnen de Lorentztransformatie nog eenvoudiger karakteriseren als we de imaginaire grootheid

$$\sqrt{-1}ct$$

introduceren in plaats van ct , als tijdsvariabele. Als we dit invoeren:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \\ x_4 &= \sqrt{-1}.ct \end{aligned}$$

en hetzelfde doen voor het geaccentueerde systeem k' , dan kan de conditie die identiek wordt voldaan door de transformatie als volgt worden uitgedrukt:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (12)$$

Met deze keuze van "coördinaten" wordt (11a) omgezet in deze vergelijking.

We zien uit (12) dat de imaginaire tijdscoördinaat x_4 in de transformatievoorwaarde op exact dezelfde manier voorkomt als de ruimtelijke coördinaten x_1, x_2, x_3 . Dit komt doordat volgens de relativiteitstheorie de "tijd" x_4 op dezelfde manier in natuurwetten voorkomt als de ruimtelijke coördinaten x_1, x_2, x_3 .

Een vierdimensionaal continuüm beschreven door de "coördinaten" x_1, x_2, x_3, x_4 , werd door Minkowski "wereld" genoemd, en hij noemde een puntgebeurtenis een "wereldpunt." Van een "gebeurtenis" in driedimensionale ruimte wordt de natuurkunde als het ware een "bestaan" in de vierdimensionale "wereld."

Deze vierdimensionale "wereld" vertoont een sterke gelijkenis met de driedimensionale "ruimte" van de (Euclidische) analytische meetkunde. Als we in de laatste een nieuw Cartesiaans coördinatensysteem (x'_1, x'_2, x'_3) introduceren met hetzelfde oorsprongspunt, dan zijn x'_1, x'_2, x'_3 , lineaire homogene functies van x_1, x_2, x_3 , die identiek voldoen aan de vergelijking:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

De analogie met (12) is compleet. We kunnen Minkowski's "wereld" formeel beschouwen als een vierdimensionale Euclidische ruimte (met imaginaire tijdscoördinaat); de Lorentztransformatie komt overeen met een "rotatie" van het coördinatensysteem in de vierdimensionale "wereld".

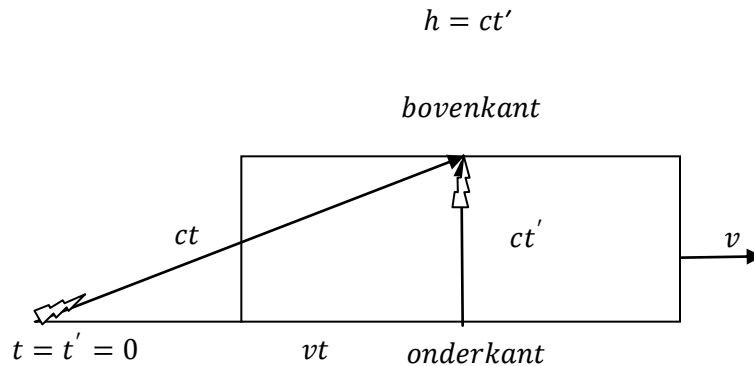
Appendix 9.2 Alternatieve afleiding van tijddilatatie en lengtecontractie

Om de effecten van de speciale relativiteitstheorie op tijd en lengte te illustreren, gebruiken we een lichtsignaal in een snel bewegend object, bijvoorbeeld een raket. We beschouwen hierbij twee referentiestelsels:

- ons stilstaande referentiestelsel met tijd t ,
- het referentiestelsel van de raket met tijd t' .

Tijddilatatie

Eerst sturen we een lichtflits **loodrecht op de bewegingsrichting van de raket**. In het raketstelsel beweegt de lichtflits van de onderkant naar de bovenkant van de raket. De hoogte van de raket is in dat stelsel h , en de lichtflits legt deze afstand af in de tijd t' :



Vanuit ons stilstaande referentiestelsel ziet de raket er naar rechts bewegend uit met snelheid v . De lichtflits volgt nog steeds de verticale afstand h , maar doordat de raket horizontaal beweegt, legt de lichtflits in ons stelsel een diagonale baan af. De horizontale verplaatsing van de raket is vt , terwijl de verticale verplaatsing van het licht nog steeds h is. De totale afstand van het licht in ons stelsel is ct . Uit de Pythagoras-relatie volgt:

$$c^2 t^2 = c^2 t'^2 + v^2 t^2$$

$$c^2 t^2 - v^2 t^2 = c^2 t'^2$$

$$t^2 (c^2 - v^2) = c^2 t'^2$$

$$t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t'^2$$

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Hieruit blijkt dat een klok in het bewegende stelsel **langzamer loopt**: de tijd t' in de raket is korter dan de tijd t in ons stilstaande stelsel. Dit is het fenomeen van **tijddilatatie**.

Lengtecontractie

Bij het meten van een lengte in een referentiestelsel moeten de posities van de twee uiteinden **op hetzelfde tijdstip in dat stelsel** worden bepaald. In ons stilstaande stelsel worden de posities van de achterkant en voorkant van de raket dus gelijktijdig vastgelegd bij t . In het raketstelsel zelf worden de posities van de twee uiteinden vastgelegd op hetzelfde moment t' .

Uitgaande van de Lorentztransformaties:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Er geldt dus dat x' en t' functies zijn van x en t , dan geldt ook:

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Om de lengte in ons frame te meten moeten we t constant houden dus $dt=0$, dit geeft:

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De lengte in de raket is L_0 , omdat het in dat frame in rust is, en we zien dan de lengte in ons frame als:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Door de relativiteit van gelijktijdigheid zijn gebeurtenissen die in het ene stelsel gelijktijdig zijn, in een ander stelsel **niet noodzakelijk gelijktijdig**. Dit verklaart waarom een bewegende raket vanuit ons perspectief een kortere lengte L heeft dan de rustlengte L_0 die in het raketstelsel wordt gemeten.

Samenvatting van de resultaten

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- Een klok in een bewegend stelsel loopt **langzamer** (tijddilatatie).
- Een bewegend object is in de bewegingsrichting **korter** (lengtecontractie).
- Lengtecontractie ontstaat door de combinatie van beweging en de relativiteit van gelijktijdigheid.

Appendix 9.3 Symmetrie van Lorentz-transformaties in de ruimtetijd

Wanneer een Lorentz-transformatie wordt uitgevoerd vanwege een constante snelheid v in de x -richting, worden formeel alleen de coördinaten x en t direct beïnvloed:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Op het eerste gezicht lijkt het alsof alleen het $x-t$ -vlak verandert, terwijl de overige ruimtelijke coördinaten y en z onveranderd blijven. Dit is echter slechts gedeeltelijk correct.

Wanneer we de ruimtetijd als vierdimensionale structuur beschouwen, zien we dat **alle processen waarin de tijdcomponent t voorkomt**, indirect beïnvloed worden. Bijvoorbeeld:

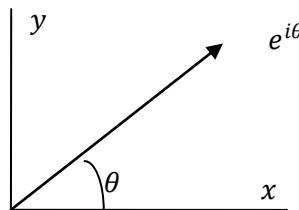
- Een klok die zich op een vaste y -positie bevindt, tikt langzamer voor een waarnemer in rust, precies zoals een klok op een vaste x -positie dat doet.
- Evenzo worden gebeurtenissen in het $y-t$ of $z-t$ vlak beïnvloed, omdat de tijd t wordt getransformeerd.

Omgekeerd, in vlakken zoals $y-x$ of $z-x$, wordt x direct getransformeerd. Ook hier is de ruimtetijd gewijzigd, al is het effect minder direct zichtbaar.

Het belangrijkste inzicht is dat de Lorentz-transformatie **niet beperkt is tot het vlak van de snelheid**. Elke vierdimensionale combinatie waarin x of t voorkomt, wordt beïnvloed. Dit geeft een **structurele symmetrie**: hoewel y en z zelf niet veranderen, verlopen alle processen in deze richtingen volgens een getransformeerde tijd of ruimtecomponent. De volledige ruimtetijd wordt hergestructureerd, en daarmee ook de fysische beschrijvingen binnen dat stelsel.

Appendix 9.4 Goniometrische Hulpmiddelen

Omdat goniometrische formules vaak worden gebruikt in de speciale relativiteitstheorie, geven we een kort overzicht van een aantal ervan en hoe ze gemakkelijk kunnen worden afgeleid.



Per definitie:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

Waarbij:

$$i = \sqrt{-1}$$

Onderbouwing van deze vergelijking:

Ten eerste beschouwen we een functie:

$$F(x) = e^{\alpha x}$$

De afgeleide is:

$$\frac{d e^{\alpha x}}{dx} = \alpha e^{\alpha x}$$

Dus:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \alpha F(x)$$

Dus, de afgeleide van een functie $F(x) = e^{\alpha x}$ is een factor α maal die functie.

Vervolgens beschouwen we een functie:

$$F(x) = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$$

Waarvan de afgeleide is:

$$\frac{d(\cos \alpha x + i \sin \alpha x)}{dx} = -\alpha \sin \alpha x + i \alpha \cos \alpha x = i \alpha (\cos \alpha x + i \sin \alpha x)$$

Hier zien we opnieuw dat:

$$\frac{dF(x)}{dx} = i \alpha F(x)$$

Waarbij:

$$F(x) = e^{i \alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x .$$

Hieruit kunnen we afleiden:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

Vanuit deze vergelijking kunnen alle goniometrische formules worden afgeleid, zoals:

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (2)$$

Door (1) en (2) op te tellen, krijgen we:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

En door (1) en (2) van elkaar af te trekken, krijgen we:

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Bovendien:

$$e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^{i\theta - i\theta} = e^0 = 1 = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Vervolgens definiëren we de hyperbolische functies:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Uit deze vergelijkingen kunnen we afleiden:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \cosh(-x) \\ \sinh(x) &= -\sinh(-x) \\ \cosh(ix) &= \cos(x) \\ -i\sinh(ix) &= \sin(x)\end{aligned}$$

Met deze hulpmiddelen zouden we in staat moeten zijn om alle benodigde goniometrische vergelijkingen af te leiden.

Appendix 9.5 Optelling van snelheden

We beschouwen twee coördinatensystemen A en B die met een constante snelheid v m/s ten opzichte van elkaar bewegen. De coördinatensystemen zijn zo gekozen dat de relatieve beweging tussen de systemen langs hun x -assen plaatsvindt. In A beweegt een object met snelheid V' met componenten in alle richtingen. Nu moeten we de snelheid van het object ten opzichte van systeem B beschouwen. Volgens Newton is de toegevoegde snelheid ten opzichte van systeem B $V_x' + v$. Volgens de speciale relativiteitstheorie is het echter anders:

Ten eerste beginnen we met de vergelijkingen voor de Lorentz-transformatie, afgeleid in de vorige hoofdstukken:

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(ct - \beta x) \quad (1)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - \beta ct) \quad (2)$$

$$\begin{aligned}y' &= y \\ z' &= z\end{aligned}$$

Hier is:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{en} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

De snelheid v van de oorsprong van systeem A ten opzichte van systeem B is hier in de x -richting.

De relatie tussen systeem B en A:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad (1a)$$

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \quad (2a)$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

De snelheid in de x' -richting in systeem A kan worden gevonden door de afgeleide van (2) te nemen:

$$V_x' = \frac{dx'}{dt'} = \gamma \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{dt'} - \beta c \frac{dt}{dt'} \right) = \gamma \left(\frac{\partial x}{\partial t} - \beta c \right) \frac{dt}{dt'} = \gamma(V_x - \beta c) \frac{dt}{dt'} \quad (3)$$

De afgeleide van (1):

$$c \frac{dt'}{dt} = c = \gamma \left(c \frac{dt}{dt'} - \beta \frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{dt'} \right) = \gamma \left(c - \beta \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{dt}{dt'} = \gamma(c - \beta V_x) \frac{dt}{dt'}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c}\right)} \quad (4)$$

Vul (4) in in (3):

$$V'_x = \frac{\gamma(V_x - \beta c)}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c}\right)} = \frac{V_x - \beta c}{1 - \frac{\beta V_x}{c}} \quad (5)$$

Snelheid in de y'-richting:

$$V'_y = \frac{\partial y'}{\partial t'} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{dt}{dt'} = V_y \frac{dt}{dt'} = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c}\right)}$$

Dus:

$$V'_y = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c}\right)} \quad (6)$$

Op dezelfde manier voor de z'-richting:

$$V'_z = \frac{V_z}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c}\right)} \quad (7)$$

Kijk nu naar vergelijking (4):

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v V_x}{c^2}}$$

In het speciale geval waarin $V'_x = 0$ dan is $V_x = v$:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \text{ dus } dt' \ll dt$$

Terug naar het algemene geval:

Voor de X-component (5):

$$V'_x = \frac{V_x - \beta c}{1 - \frac{\beta V_x}{c}} = \frac{V_x - v}{1 - \frac{v V_x}{c^2}}$$

Of:

$$V_x = \frac{V'_x + v}{1 + \frac{v V'_x}{c^2}}$$

Een soortgelijke afleiding via vergelijkingen (1a) en (2a) geeft:

$$V_x = \frac{V'_x + \beta c}{1 + \frac{\beta V'_x}{c}} \quad (5a)$$

$$V_y = \frac{V'_y}{\gamma \left(1 + \frac{\beta V'_x}{c}\right)} \quad (6a)$$

$$V_z = \frac{V'_z}{\gamma \left(1 + \frac{\beta V'_x}{c}\right)} \quad (7a)$$

Dus, via Newton zouden we in de x-richting een toegevoegde snelheid hebben van:

$$V'_x + v$$

maar volgens de speciale relativiteitstheorie wordt het Newton-resultaat gecorrigeerd naar:

$$\frac{V'_x + v}{1 + \frac{v V'_x}{c^2}}$$

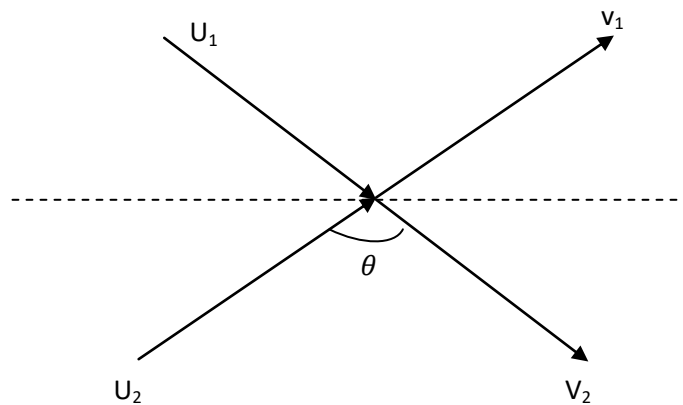
In het algemeen, wanneer de term $v V'_x$ veel kleiner is dan c^2 , kunnen we het resultaat benaderen met het Newton-resultaat $V'_x + v$.

Appendix 9.6 Botsingen

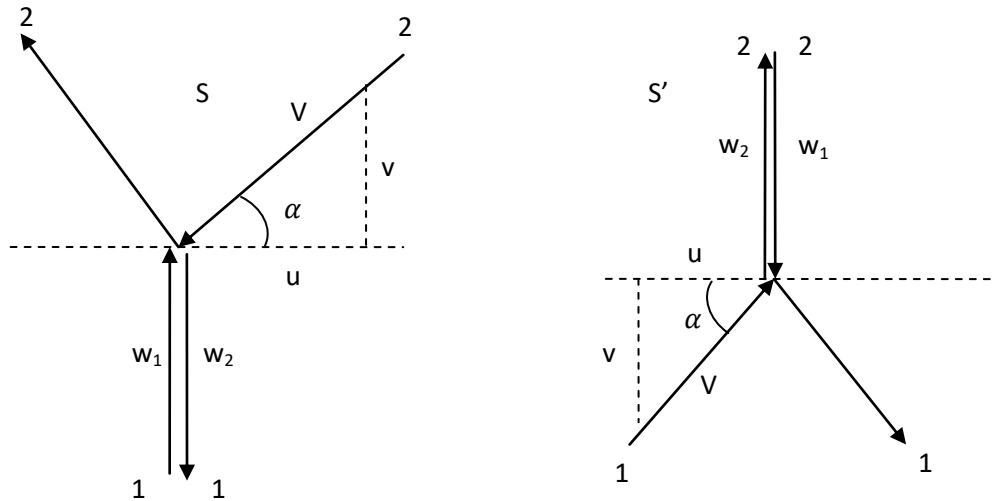
Stel een perfect elastische botsing voor tussen twee identieke deeltjes; een elastische botsing is een botsing zonder verlies van kinetische energie. De beginsnelheden van de deeltjes zijn respectievelijk $\vec{u}_1$ en $\vec{u}_2$ en na de botsing $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Vanwege de impulsbehoud geldt:

$$m_{1u} u_1 + m_{2u} u_2 = m_{1v} v_1 + m_{2v} v_2$$

Hier zijn m_{1u} en m_{2u} de massa's vóór de botsing en m_{1v} en m_{2v} de massa's na de botsing.



Eerst beschouwen we de botsing vanuit een coördinatensysteem dat beweegt met deeltje één. Dan beweegt deeltje 1 naar boven met snelheid w_1 en naar beneden met w_2 . Deze snelheden zijn gelijk, maar tegengesteld. Deeltje 2 heeft snelheid $\vec{V}$ met een x-component u en een y-component v .



Links: Botsing tussen twee identieke deeltjes in een coördinatensysteem S dat meebeweegt met deeltje 1. Rechts: Hetzelfde, maar nu S' dat meebeweegt met deeltje 2.

Nu moeten we de relatie vinden tussen de y-componenten van de impuls van de deeltjes 1 en 2 in systeem S, dus w en v . In het vorige hoofdstuk vonden we de volgende relatie:

$$V_y' = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c}\right)}$$

Aangezien:

$$V_y = w \text{ en } V_x = 0$$

krijgen we:

$$v = \frac{w}{\gamma}$$

Vanwege de symmetrie is w hier de snelheid van deeltje 1 in systeem S en de snelheid van deeltje 2 in S'. v is de y-component van deeltje 2 in S en van deeltje 1 in S'.

De totale snelheid van het bewegende deeltje 1 in S en van het bewegende deeltje in S' is hetzelfde, namelijk:

$$V = \sqrt{v^2 + u^2}$$

Het impulsbehoud in de y-richting geeft nu:

$$m_w w - m_v v = -m_w w + m_v v$$

waaruit volgt:

$$m_w w = m_v v$$

Dus:

$$\frac{m_v}{m_w} = \frac{w}{v} = \frac{w}{w/\gamma} = \gamma \quad (1)$$

Stel nu dat de snelheid w zeer klein is. In deze limiet geldt:

$$\lim_{w \rightarrow 0} v = 0 \text{ and } \lim_{w \rightarrow 0} V = u.$$

In dat geval kunnen de relativistische effecten worden verwaarloosd en kan de klassieke uitdrukking voor impuls worden herleid.

Dus:

$$\lim_{w \rightarrow 0} m_w = m$$

Vul dit in (1) in:

$$\lim_{w \rightarrow 0} m_v = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Vanwege impulsbehoud moet de definitie van impuls worden aangepast. Deze relativistische uitbreiding is:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

Appendix 9.7 De Energie van een Bewegend Object

Met het gedachte-experiment toonde Einstein aan dat energie en massa equivalent zijn via de relatie $E = mc^2$. We hebben laten zien dat voor een object dat met een snelheid beweegt, de impuls moet worden aangepast aan de relativistische beschrijving:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

Dus kan worden gesteld dat de energie van een object gelijk is aan:

$$E = \gamma mc^2.$$

Dus:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Met de Taylorreeksontwikkeling:

$$E = \gamma mc^2 \approx mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{3v^4}{8c^4} \dots \dots \right)$$

Als v veel kleiner is dan c , kunnen de derde en volgende termen binnen de haakjes worden verwaarloosd. Dit leidt tot:

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Dus dit is de kinetische energie $\frac{1}{2}mv^2$ plus een constante mc^2 .

Appendix 9.8 Energie-Impulsvector

Zoals gevonden door Minkowski:

$$\begin{aligned}
 c^2 d\tau^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\
 c^2 d\tau^2 &= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right) \\
 d\tau^2 &= dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Aangezien:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \\
 d\tau^2 &= dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{dt^2}{\gamma^2} \\
 \Rightarrow \gamma &= \frac{dt}{d\tau}
 \end{aligned}$$

Uit (1) we afleiden:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dx^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dy^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dz^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} \\
 m_0^2 c^2 &= m_0^2 c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - m_0^2 \frac{dx^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - m_0^2 \frac{dy^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - m_0^2 \frac{dz^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} \\
 m_0^2 c^2 &= \gamma^2 m_0^2 c^2 - \gamma^2 m_0^2 v_x^2 - \gamma^2 m_0^2 v_y^2 - \gamma^2 m_0^2 v_z^2 \\
 p^2 &= \left(\frac{E}{c} \right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 \\
 p_0 &= \frac{E}{c} \\
 p_1 &= p_x \\
 p_2 &= p_y \\
 p_3 &= p_z \\
 p^2 &= \left(\frac{E}{c} \right)^2 - |\vec{p}|^2 = m_0^2 c^2 \\
 E^2 - c^2 |\vec{p}|^2 &= m_0^2 c^4 \\
 E &= \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2}
 \end{aligned}$$

Of:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2$$

Waarbij:

$$p = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En m_0 de rustmassa is (massa bij snelheid nul)

Of via de relatie:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Nu verder delen:

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^4 \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &\Rightarrow m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Dus:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Of zoals men gebruikelijk schrijft:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (2)$$

Waarbij dus:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Appendix 9.8.1 Alternatieve afleiding van de Energie-Impuls-Massa relatie

$$p = mv$$

$$p = \gamma m_0 v = \gamma m_0 c^2 \frac{v}{c^2}$$

$$pc = \gamma m_0 c^2 \frac{v}{c} = \beta \gamma m_0 c^2$$

Hier is:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ and } \beta = \frac{v}{c}$$

Nu, met gebruik van bovenstaande, bekijken we wat er gebeurt:

$$\begin{aligned}
(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 &= (\beta \gamma m_0 c^2)^2 + (m_0 c^2)^2 \\
(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 &= (m_0 c^2)^2 (\beta^2 \gamma^2 + 1) \\
(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 &= (m_0 c^2)^2 \left(1 + \beta^2 \frac{1}{1 - \beta^2} \right) \\
(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 &= (m_0 c^2)^2 \left(\frac{1 - \beta^2 + \beta^2}{1 - \beta^2} \right) = (m_0 c^2)^2 \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) = (m_0 c^2)^2 \gamma^2 \\
(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 &= (m_0 c^2)^2 \gamma^2 = (\gamma m_0 c^2)^2 = E^2
\end{aligned}$$

Dus:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

Appendix 9.8.2 Klassiek Bewijs van Energieconservatie

Energie is de som van kinetische energie K en potentiële energie U :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

Tijdafgeleide en partiële afgeleide voor een eendimensionale situatie:

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = mva + v \frac{dU}{dx}$$

De kracht op een deeltje, volgens het principe van potentiële energie, is gerelateerd aan de afgeleide van de potentiële energie, $U(x)$:

$$\begin{aligned}
F &= - \frac{dU}{dx} \\
\frac{dE}{dt} &= v \left(ma + \frac{dU}{dx} \right) = v(ma - F)
\end{aligned}$$

We weten dat volgens Newton:

$$F = ma$$

Dus:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = \text{constant}$$

De energie E is dus geconserveerd.

Appendix 9.9 Afleiding van $E = mc^2$

Einstein vond de vergelijking $E=mc^2$ door middel van zijn zogenaamde gedachte-experimenten:

Er is een stationaire doos die in de ruimte zweeft, niet beïnvloed door enige zwaartekracht. Wanneer aan de linkerkant een foton wordt uitgezonden dat naar rechts beweegt, zal de doos een beetje naar links bewegen vanwege de impulsbehoudswet. Op een bepaald moment botst het foton tegen de rechterkant van de doos, waarbij al zijn impuls aan de doos wordt overgedragen. Door de impulsbehoudswet stopt de doos met bewegen.

Het foton heeft zich verplaatst en de doos is ook bewogen, terwijl er geen externe krachten aanwezig waren. Dus het massamiddelpunt van het systeem verandert niet van locatie.

Zoals we in het vorige hoofdstuk hebben gezien geldt voor de relativistische energie (zie [Appendix 9.8](#) vergelijking (2)):

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Voor een foton geldt dat de massa nul is, dus:

$$E = pc$$

Dus de impuls van het foton is:

$$p_{\text{photon}} = \frac{E}{c}$$

De doos met massa M zal een beetje in de tegenovergestelde richting bewegen met snelheid v .

De impuls van de doos is:

$$p_{\text{box}} = Mv$$

In de tijd Δt zal het foton de andere kant bereiken. In deze tijd heeft de doos zich verplaatst over Δx . De snelheid van de doos is:

$$v = -\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Vanwege de wet van behoud van impuls geldt $p_{\text{photon}} + p_{\text{box}} = 0 \Rightarrow p_{\text{box}} = -p_{\text{photon}}$.

Dus:

$$M \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{E}{c}$$

De lengte van de doos is L en de tijd die het foton nodig heeft om de andere kant van de doos te bereiken is:

$$\Delta t = \frac{L}{c}$$

Dus:

$$M \Delta x = \frac{EL}{c^2}$$

Stel, hypothetisch, dat het foton enige massa m heeft. Dan kan het massamiddelpunt van het hele systeem worden berekend. Als de positie van de doos x_1 is en het foton positie x_2 heeft, dan is het massamiddelpunt van het systeem:

$$\bar{x} = \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m}$$

Het is vereist dat het massamiddelpunt van het hele systeem niet verandert. Dus het massamiddelpunt moet aan het einde van het experiment hetzelfde zijn als aan het begin:

$$\frac{Mx_1 + mx_2}{M + m} = \frac{M(x_1 - \Delta x) + mL}{M + m}$$

Het foton start bij $x_2 = 0$, dus krijgen we:

$$mL = M\Delta x$$

Nu krijgen we:

$$mL = \frac{EL}{c^2}$$

Met enige herschikking:

$$E = mc^2$$

Opmerking:

Het lijkt erop dat in deze afleiding een benadering is gemaakt, want wanneer het foton de andere kant van de doos bereikt, is de doos een stukje Δx in de tegenovergestelde richting verplaatst, zodat het totale pad van het foton $L - \Delta x$ is, en niet alleen L . Bovendien is er ook een relativistisch effect, de Lorentzcontractie vanwege de snelheid v van de doos. Dus het pad wordt:

$$L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x$$

Dit leidt tot:

$$\Delta t = \frac{L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x}{c}$$

$$M \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{E}{c}$$

$$M\Delta x = \frac{E}{c} \Delta t$$

Dus:

$$M\Delta x = \frac{E \left(L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x \right)}{c^2}$$

Nu:

$$\frac{Mx_1 + mx_2}{M + m} = \frac{M(x_1 - \Delta x) + m \left(L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x \right)}{M + m}$$

$$\Rightarrow -M\Delta x + m \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right) = 0$$

$$m \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right) = M\Delta x = \frac{E \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right)}{c^2}$$

$$\frac{E \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right)}{c^2} = m \left(L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Delta x \right)$$

$$\mathbf{E = mc^2}$$

Gelukkig eindigt het in dezelfde vergelijking pfff....

Appendix 9.10 Toepassingen

Appendix 9.10.1 Kernfusie en Kernsplijting

Wanneer een proton p en een neutron n bij elkaar worden gebracht, kunnen ze samensmelten en een kern (nucleus) van deuterium (ook wel zwaar water genoemd) d vormen. De massa's van p , n , en d zijn:

$$m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2$$

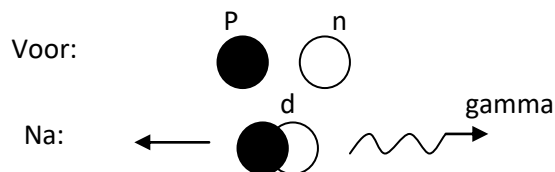
$$m_d = 1875.61339 \text{ MeV}/c^2$$

De gebruikte eenheid $\frac{\text{MeV}}{c^2}$ vereist enige toelichting. Vanuit de relatie $E = mc^2$ kunnen we zien dat massa kan worden uitgedrukt in eenheden van energie gedeeld door een constante c^2 (de lichtsnelheid). In 'MKSA' -eenheden is de eenheid van energie de Joule, maar het is ook mogelijk, en gebruikelijk in de deeltjesfysica, om de elektronvolt (eV) te kiezen. Een elektronvolt is de hoeveelheid energie die een eenheidslading krijgt wanneer deze een potentiaalverschil van 1 Volt passeert. De eenheidslading (lading van het elektron) is gelijk aan $1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, dus $1eV = 1.6 \cdot 10^{-19}J$, $1 \text{ MeV} = 10^6 eV$.

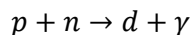
Omdat de massa van het deutron (= deuteriumkern) kleiner is dan de som van de massa's van de componenten, proton en neutron, moet er energie zijn vrijgekomen! Als p en n met verwaarloosbare snelheid bij elkaar worden gebracht, is de vrijgekomen energie gelijk aan:

$$E = m_p c^2 + m_n c^2 - m_d c^2$$

$$= 2.22455 \text{ MeV}$$



Deze energie wordt vrijgegeven in de vorm van een foton:



Een foton is massaloos; het is een quantum van het elektromagnetische veld, geïntroduceerd door Einstein om het foto-elektrisch effect te verklaren; het krijgt het symbool γ . Niet alle ontbrekende massa gaat naar de energie van het foton. Zelfs als p en n voor de reactie ten opzichte van elkaar in rust zijn, zal de γ na de reactie met de lichtsnelheid wegvliegen. En om de impulsconservatie te waarborgen, zal d in de tegenovergestelde richting bewegen met dezelfde impuls (zie bovenstaande figuur). Vanwege de grootte van de massa van d is de energie die hiermee samenhangt erg klein.

$$\text{Omdat als } pc \ll mc^2, \text{ dan } E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \cong mc^2$$

De hierboven beschreven reactie is een voorbeeld van **kernfusie**. Over het algemeen blijkt dat lichte kernen (nuclei) kunnen samensmelten tot zwaardere kernen terwijl energie wordt vrijgegeven, zoals in het bovenstaande voorbeeld. Alle kernen tot en met ijzer kunnen worden geproduceerd via fusie terwijl energie wordt vrijgegeven.

Het tegenovergestelde effect is dat zwaardere kernen, zoals het bekende voorbeeld van Uranium, zwaarder zijn dan de som van de componenten van de kern. In dat geval wordt er alleen energie vrijgegeven wanneer de kernen worden gesplitst (kernspijting, **kernfissie**).

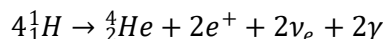
Appendix 9.10.2 Elektrische Auto Rijden op 1 gram Waterstof door middel van Kernfusie

We gaan hier kijken naar kernfusie zoals dat in de zon gebeurt waarbij vier waterstof atomen fuseren tot een helium atoom. In dit fusie proces verdwijnt massa die omgezet wordt naar energie. We berekenen nu hoe groot deze energie is en wat dat praktisch betekent.

Om te bepalen hoeveel kilometers je kunt rijden op 1 gram waterstof door middel van kernfusie, moeten we een aantal stappen doorlopen om de energie die door kernfusie wordt gegenereerd te berekenen en vervolgens om te zetten in praktische rijafstand.

1. Energieopbrengst van kernfusie:

De fusie van waterstofkernen, zoals in de zon, gaat meestal via de proton-protoncyclus. De netto reactie is:



In dit proces, waarbij vier waterstofatomen worden omgezet naar een heliumatoom, is het totaal gewicht van de 4 waterstofatomen groter dan het gewicht van het heliumatoom. Er is dus een beetje massa verdwenen. Door toepassing van de formule $E = mc^2$ kan er berekend worden hoeveel massa hierbij omgezet wordt tot energie.

De energie die vrijkomt bij deze reactie is ongeveer 26,7 MeV (Mega-elektronvolt) per fusie van vier waterstofatomen tot één heliumatoom.

1 gram waterstof bevat ongeveer $6,022 \times 10^{23}$ (getal van Avogadro) waterstofatomen (1 mol). Dus, in 1 gram waterstof hebben we $\frac{6,022 \times 10^{23}}{4} \approx 1,505 \times 10^{23}$ fusie-reacties.

Elke fusie-reactie geeft 26,7 MeV aan energie, dus totale energie:

$$E_{fusie} = 1,505 \times 10^{23} \times 26,7 \text{ MeV}$$

2. Omzetten van MeV naar Joules:

Een Joule is gelijk het verplaatsen van een lading van 1 Coulomb in een veld van 1 Volt. Dus

$$\text{Joule} = qV$$

De lading van een elektron e is $1,60218 \times 10^{-19} \text{ Coulomb}$.

Dus:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Joule} &= \frac{1}{1,60218 \times 10^{-19}} \text{ eV} \\ \Rightarrow \text{eV} &= 1,602 \times 10^{-19} \text{ Joules} \end{aligned}$$

Dus:

$$1 \text{ MeV} = 1,60218 \times 10^{-13} \text{ Joules}$$

Dus per 1 gram waterstof is de totale energie in Joules:

$$E_{tot} = 1,505 \times 10^{23} \times 26,7 \times 1,60218 \times 10^{-13} \approx 6,43 \times 10^{11} \text{ Joules}$$

3. Berekening van de energie:

$$E_{tot} \approx 6,43 \times 10^{11} \text{ Joules per gram waterstof}$$

Dit is dus de energie die vrijkomt in dit proces, waarbij dus een klein gedeelte van de massa wordt omgezet naar energie.

Ter vergelijking kunnen we kijken naar de theoretische berekening wanneer 1 gram materie totaal wordt omgezet volgens $E = mc^2$:

$$E = \frac{1}{1000} \times (3 \times 10^8)^2 \approx 9 \times 10^{13} \text{ Joules}$$

Dus dit scheelt ongeveer een factor 140 (of in procenten is fusie 0,7% van de energie bij totale omzetting van 1 gram massa).

4. Alternatieve berekening:

Bij kernfusie wordt 4 mol waterstof omgezet naar 1 mol helium waarbij een hoeveelheid energie vrijkomt. In dit proces gaat een beetje massa verloren die wordt omgezet in energie.

De massa van 4 mol waterstof H is $4 \times 1,00784 = 4,03136$ gram waterstof.

De massa van 1 mol helium He is 4,0026 gram helium.

Dus het massaverschil is $0,02876 \text{ gram} = 2,876 \times 10^{-5} \text{ kg}$.

$$E = mc^2 \text{ waarbij } c = 3 * 10^8 \text{ m/s}$$

De vrijkomende energie is dus:

$$E = 2,876 * 10^{-5} * (3 * 10^8)^2 = 2,588 * 10^{12} \text{ bij } 4,03136 \text{ gram waterstof}$$

Dat is:

$$E = 6,42 * 10^{11} \text{ Joule per 1 gram waterstof}$$

1.1. Energieverbruik van een elektrische auto:

Elektrische auto's verbruiken ongeveer 15-20 kWh per 100 km. We nemen hier 17 kWh per 100 km voor gemiddeld gebruik.

- 1 kWh = $3,6 \times 10^6$ Joules.

Dus, 17 kWh = $61,2 \times 10^6$ Joules per 100 km.

1.2. Berekening van de theoretische rijafstand:

Met de theoretisch beschikbare energie kunnen we de afstand berekenen:

$$\text{Afstand} = \frac{6,43 \times 10^{11}}{61,2 \times 10^6} \times 100 \text{ km}$$

$$\text{Afstand} \approx 1,05 \times 10^6 \text{ km}$$

1.3. Efficiëntie van energieomzetting:

Echter de bovenstaande berekening is gebaseerd op een 100% efficiënte energieomzetting. Maar bij de omzetting van energie van kernfusie naar bruikbare elektriciteit, en vervolgens naar de aandrijving van een elektrische auto, moeten we rekening houden met verschillende efficiënties:

- **Efficiëntie van energieomzetting naar elektriciteit:** Laten we aannemen dat deze efficiëntie 40% is (een conservatieve schatting, aangezien kernfusiereactoren nog in ontwikkeling zijn).
- **Efficiëntie van de elektrische aandrijving:** Elektrische auto's hebben doorgaans een efficiëntie van ongeveer 85-90%. We nemen hier 90% voor de berekening.

De totale efficiëntie is dus $0,4 \times 0,9 = 0,36$.

1.4. Bruikbare energie:

De bruikbare energie die uiteindelijk beschikbaar is voor de aandrijving van de auto:

$$E_{\text{bruikbaar}} = 6,43 \times 10^{11} \times 0,36 = 2,31 \times 10^{11} \text{ Joules}$$

1.5. Berekening van de praktische rijafstand:

Met de praktisch beschikbare energie kunnen we de afstand berekenen:

$$\text{Afstand} = \frac{2,31 \times 10^{11}}{61,2 \times 10^6} \times 100 \text{ km}$$

$$\text{Afstand} \approx 3,77 \times 10^5 \text{ km}$$

Daarom kan een elektrische auto, aangedreven door de energie afkomstig van kernfusie van 1 gram waterstof, theoretisch ongeveer 377 duizend (**377.000**) kilometer rijden. De gemiddelde afstand die men over het algemeen per jaar aflegt is ongeveer 15.000 km dus dat betekent dat men op **1 gram waterstof vijf en twintig (25) jaar kan rijden.**

Appendix 9.11 Relativistische elektromagnetisme

(Berekeningen gebaseerd op Richard Feynman https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_13.html)

Appendix 9.11.1 Inleiding

Het woord elektromagnetisme veronderstelt dat er een elektrisch veld en een magnetisch veld is, en suggereert daardoor dat er bronnen zijn voor beide velden. We weten echter dat de elektrische lading de bron is voor het elektrische veld, en tot nu toe zijn er geen magnetische bronnen gevonden voor het magnetische veld. Het lijkt erop dat een magnetisch veld altijd wordt veroorzaakt door een in de tijd variërend elektrisch veld. Zelfs op microscopische schaal, de kwantumschaal, worden magnetische velden veroorzaakt door elektrische spins van elektronen of atomen. Het elektrische veld heeft als bronnen de elektronen ($-1e$) en de protonen ($+1e$).

Misschien kunnen we zo ver gaan dat we kunnen zeggen dat het magnetische veldmodel slechts een zeer nuttig wiskundig hulpmiddel is om het elektromagnetische fenomeen te beschrijven; maar het enige dat er is, is het elektrische veld en de variatie van het elektrische veld op basis van accumulaties van elektronen en protonen.

Appendix 9.11.2 Berekeningen

Als we een voorbeeld nemen van een stroomdrager, kunnen we normaal gesproken met de Maxwell-vergelijkingen het elektrische en magnetische veld berekenen. Een alternatieve benadering is om de berekening volledig op basis van het elektrische veld te doen en het magnetische deel over te slaan.

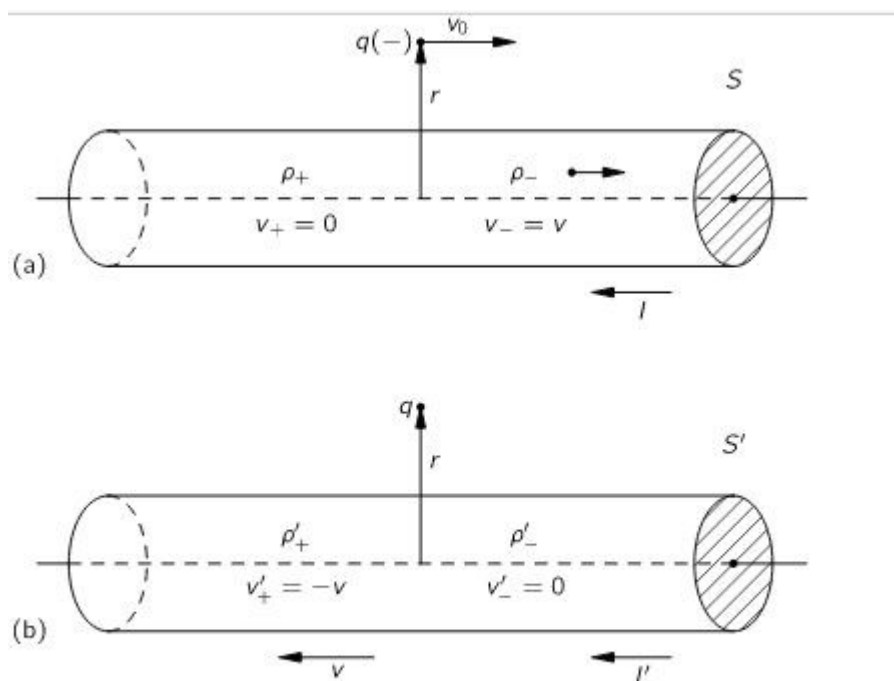


Fig. 1. De interactie van een stroomdrager en een deeltje met de lading q , gezien in twee kaders. In kader S (deel a) is de draad in rust; in kader S' (deel b) is de lading in rust.

We zullen nu enkele formules afleiden voor later gebruik.

De stroomdichtheid is de gemiddelde stroomsnelheid van de ladingen. Stel dat er een verdeling van ladingen is met een gemiddelde beweging met snelheid v . De verdeling passeert over een oppervlakte-element ΔS , de lading Δq die door het oppervlakteelement in een tijd Δt gaat, is gelijk aan de lading:

$$\Delta q = \rho v \cdot n \Delta S \Delta t \quad (1)$$

Hier is ρ de ladingsdichtheid: de lading per eenheid volume.

Hier kan $v \Delta t \cdot \Delta S$ als een volume worden beschouwd. Dus, de lading is de ladingsdichtheid vermenigvuldigd met het volume.

De lading per tijdseenheid is dan $\rho v \cdot n \Delta S$, wat geeft:

$$j = \rho v \quad (2)$$

De totale stroom door het oppervlak S is:

$$i = j \cdot S \quad (3)$$

We beschouwen nu een stroomdrager die in rust is en elektronen, negatief geladen deeltjes, die met een snelheid v naar rechts bewegen. De protonen, positief geladen deeltjes, blijven in rust in de draad. Een testdeeltje, met een negatieve lading q , beweegt met dezelfde snelheid als de elektronen naar rechts. We observeren het geheel in rust ten opzichte van de draad. De totale draad distribueert alle ladingen zodanig dat deze neutraal is.

Laten we de externe kracht, van de draad, beschouwen die kan worden veroorzaakt door de elektrische en magnetische velden:

$$F = q(E + v \times B)$$

$$B = \mu_0 H$$

Het magnetische veld rondom de draad is:

$$H = \frac{i}{2\pi r}$$

Beschouw de kracht op het testdeeltje waar het elektrische veld nul is omdat de totale lading in de draad neutraal is:

$$F = q(v \times B) = qvB \sin \varphi$$

Aangezien v loodrecht staat op B dan $\sin \varphi = 1$

$$F = qvB = qv\mu_0 H = \frac{qv\mu_0 i}{2\pi r}$$

De ladingsdichtheid ρ is gedefinieerd als de totale lading in een volume gedeeld door de grootte van het volume V :

$$\rho = \frac{q}{V}$$

Als A de oppervlakte is van de dwarsdoorsnede van de draad en L is de arbitrair gekozen lengte van het volume, in rust, langs de draad, dan:

$$q = \rho AL$$

Wanneer de draad in rust is:

$$\rho_+ + \rho_- = 0$$

Als we nu de situatie vanuit het perspectief van het testdeeltje beschouwen, is het testdeeltje in rust en beweegt de draad naar links met een snelheid v .

Het volume wordt bepaald door A en zijn lengte L . De lengte tussen een bewegend volume en een volume in rust is:

$$L_{moving} = L_{rest} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Aangezien de snelheid van de elektronen hetzelfde is als de gekozen snelheid van het testdeeltje, zijn de elektronen nu ook in rust. Dit betekent dat:

$$L_{rest} = \frac{L_{moving}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Omdat de draad nu een snelheid van v naar links heeft, bewegen de positieve deeltjes ook met v naar links en verandert de lengte L van het volume met de factor:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wanneer de draad in rust was, was het externe elektrische veld buiten de draad:

$$\rho_+ + \rho_- = \rho_+ - \rho_+ = 0$$

Omdat de bewegende lengte kleiner is dan de rustlengte, is het bewegende volume ook kleiner. Dus dan is de dichtheid van de geladen deeltjes groter. Dus, als we de ladingsdichtheid beschouwen wanneer het testdeeltje in rust is, moeten we de bewegende dichtheid ρ_- vermenigvuldigen met

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dus, nu wordt het elektrische veld buiten de draad bepaald door de totale ladingsdichtheid:

$$\begin{aligned} \rho_{netto} &= \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho_- \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \rho_+ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \rho_+ \frac{1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \rho_{netto} &= \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Het volume van een lengte L van de draad geeft een lading van:

$$q = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} AL$$

Dus, het elektrische veld buiten de draad is niet nul en staat loodrecht op de draad. Als we een buis rond de draad van lengte L en afstand van de as van de draad van r beschouwen, is het volume:

$$E = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{2\pi\epsilon_0 r L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} AL = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} A$$

Dus:

$$F' = qE = q\rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} A \quad (4)$$

Voor v veel kleiner dan c :

$$F' = qE = q\rho_+ \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} A$$

Voor het magnetische veld in de rustsituatie was:

$$F = qvB = qv\mu_0 H = \frac{qv\mu_0 i}{2\pi r} \quad (5)$$

Dit geeft, wanneer J de stroomdichtheid door de draad is en $J = \rho v$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{qv\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{qv\mu_0 JA}{2\pi r} \\ c^2 &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \\ F &= \frac{qv\mu_0 JA}{2\pi r} = \frac{qv\rho v A}{2\pi r \epsilon_0 c^2} = \frac{qv\rho v A}{2\pi r \epsilon_0 c^2} = q\rho \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} A \end{aligned} \quad (6)$$

Dus uit de vergelijkingen (4) en (6) volgt:

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De krachten werken in de transversale y -richting, dus de impuls in de y -richting en de y' -richting moet hetzelfde zijn omdat de transversale snelheid nul is.

Nu vergelijken we de impuls in de y en de y' -richting:

$$\Delta p_y = F \Delta t$$

En

$$\Delta p'_y = F' \Delta t'$$

Zoals we weten, lijkt de tijd voor een bewegend deeltje langzamer te gaan dan die in het rustsysteem van het deeltje, dus:

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
\Delta p_y = \Delta p'_y &= F \Delta t = F \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F' \Delta t' \\
\Rightarrow F' &= \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7)
\end{aligned}$$

Dus nu is aangetoond, met vergelijkingen (5) (6) en (7), dat:

$$F = qvB = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} F' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} qE$$

Appendix 9.11.3 Conclusie

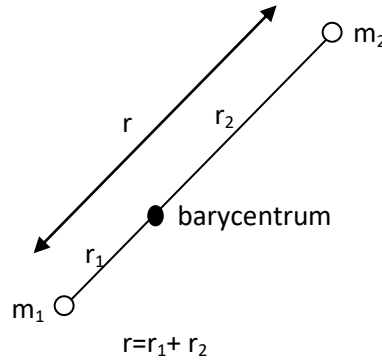
We hebben gevonden dat we hetzelfde fysieke resultaat krijgen, ongeacht of we de beweging van een deeltje dat langs een draad beweegt analyseren in een coördinatensysteem dat in rust is ten opzichte van de draad, of in een systeem dat in rust is ten opzichte van het deeltje. In de eerste instantie was de kracht puur “magnetisch,” terwijl deze in de tweede instantie puur “elektrisch” was. Dit toont ook aan dat magnetisme in feite een relativistisch effect is.

Appendix 10 Specifiek Hoekmoment

In dit document, en vooral waar we de Schwarzschild-vergelijking gebruiken, wordt de term hoekmoment gebruikt. Dit wordt aangeduid met de vorm $L = mr^2 \frac{d\phi}{dt}$ (Omdat: $L = mvr = mrv = mr \frac{rd\phi}{dt} = mr^2 \frac{d\phi}{dt}$).

Het is echter niet het werkelijke hoekmoment, maar een benadering. Hierna volgt een toelichting.

In de Schwarzschild-formule is er een relatie tussen een deeltje en een groot, massief lichaam. Het gekozen referentiekader is het centrum van het grote, massieve lichaam. Het is dus een soort tweelichamenprobleem. Laten we nu het hoekmoment voor een tweelichamenprobleem bekijken.



De twee lichamen draaien om elkaar en het zwaartepunt wordt het barycentrum genoemd. De voorwaarde van de cirkelvormige lichamen is dat:

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} \quad (1)$$

Om symmetrie van de krachten te waarborgen, moeten de massa's aan tegenovergestelde zijden van het barycentrum blijven. De periodes van de banen moeten dus gelijk zijn:

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_2}{v_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2)$$

$$v_1 = \frac{r_1}{r_2} v_2 = \frac{r_1}{r_2} (v - v_1) \quad (3)$$

$$v_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{r_1}{r_2} v \Rightarrow v_1 = \frac{r_1}{r} v \quad (4)$$

En op dezelfde manier:

$$v_2 = \frac{r_2}{r_1} v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{r_2}{r} v \quad (5)$$

De snelheid van m_2 ten opzichte van m_1 is:

$$v = v_1 + v_2 \quad (6)$$

Vul (3) in (1):

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_1 v_2^2}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} \Rightarrow \frac{m_1}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{m_2}{r_2}$$

$$\Rightarrow m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad (7)$$

$$m_2 r_2 = m_1 (r - r_2) = m_1 r - m_1 r_2$$

$$r_2 (m_1 + m_2) = m_1 r \Rightarrow r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \quad (8)$$

Laten we het hoekmoment van m_2 ten opzichte van m_1 berekenen.

$$L_2 = m_2 v_2 r_2 = m_2 \frac{r_2}{r} v \frac{m_1}{m_1 + m_2} r = m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_2 v = m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v r \quad (9)$$

$$L_2 = \frac{1}{m_2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 \quad (10)$$

$$L_1 = \frac{1}{m_1} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 \quad (11)$$

Het totale hoekmoment van de twee lichamen:

$$L = L_2 + L_1 = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega r^2$$

Om het in lijn te brengen met de Schwarzschild-vergelijking:

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \frac{d\Phi}{d\tau} \quad (12)$$

We noemen m de gereduceerde massa.

$$m = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \quad (13)$$

Het specifieke hoekmoment h is:

$$h = \frac{L}{m} = r^2 \frac{d\Phi}{d\tau} \quad (14)$$

In het geval dat m_1 staat voor een grote massa M en m_2 de massa van een deeltje, dan:

$$\frac{m_2 M}{M + m_2} \Rightarrow m_2 \quad (15)$$

Dus, als $M \gg m_2$, dan wordt de massa in de hoekmoment-vergelijking bepaald door de massa van het deeltje alleen.

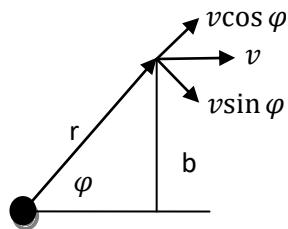
Appendix 11 Overwegingen over Rotatie

Appendix 11.1 Inleiding

Hieronder zullen we een toelichting geven op de centrifugale en centripetale kracht, eerst gebaseerd op Newton, en later breiden we dit uit naar de algemene relativiteitstheorie. De centrifugale kracht is de kracht die van het rotatiecentrum naar buiten werkt. De centripetale kracht is naar het centrum gericht.

Appendix 11.2 Impuls

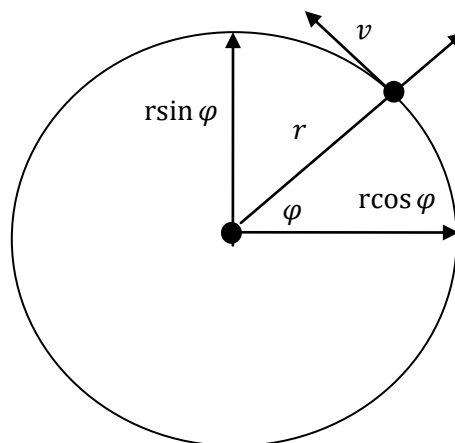
Volgens Newton heeft een bewegend deeltje met massa m en een snelheid v een impuls van mv ; als er geen krachten op het deeltje werken, zal het deeltje uniform bewegen in een rechte lijn met snelheid v . Ten opzichte van een punt op afstand r heeft het deeltje een impulsmoment $m\vec{v} \times \vec{r}$.



In de bovenstaande afbeelding is het impulsmoment $L = m v \sin \varphi \cdot r = mvr \sin \varphi$ of $L = mvb$.

Appendix 11.3 Cirkel

Zoals eerder gezegd zal het deeltje uniform in een rechte lijn bewegen, dus als de baan van het deeltje een cirkel is, is er een kracht nodig.



We beginnen met een constante straal r en splitsen dit op in de x - en y - componenten. Vanaf daar berekenen we de circulaire snelheid en versnelling:

$$x = r \cos \varphi = r \cos \omega t$$

$$y = r \sin \varphi = r \sin \omega t$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega r \cos \omega t$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 r \cos \omega t$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 r \sin \omega t$$

De totale kracht is:

$$F = m \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = -m\omega^2 r$$

Dus, het deeltje wil langs een rechte lijn bewegen, maar door zijn rotatie voelt het een loodrechte naar buiten gerichte kracht $F = m\omega^2 r$. Zoals hierboven is aangetoond, moet deze kracht worden gecompenseerd door een centripetale reactiekracht $F = -m\omega^2 r$, dus in de richting van het centrum, om het deeltje op zijn cirkelbaan te houden.

Appendix 11.4 Rotatie van een Bol

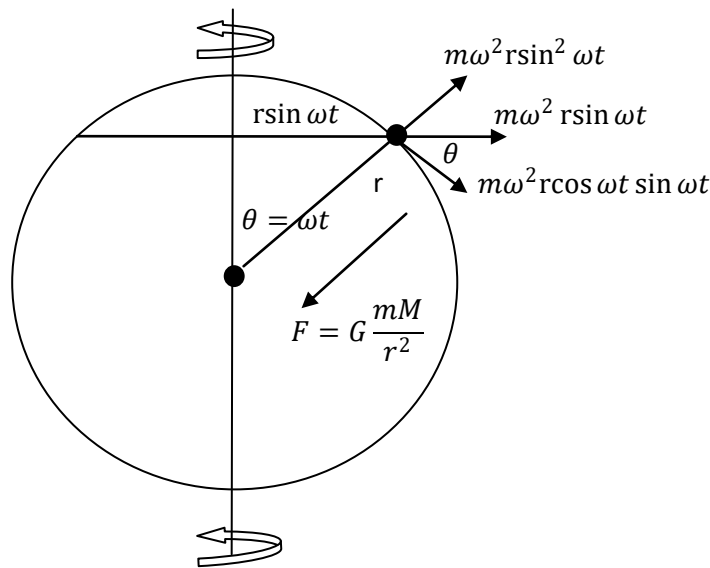


Fig. 3

In principe beschouwen de bol bestaande uit vele deeltjes maar we beschouwen nu in eerste instantie het gedrag van één deeltje ergens op de bol.

Het deeltje roteert rond de verticale as en ondervindt een horizontale centrifugale kracht van:

$$m\omega^2 r \sin \omega t$$

Dit geeft een centrifugale kracht in de radiale richting van de bol van:

$$m\omega^2 r \sin^2 \omega t$$

Samen met de centripetale kracht resulteert dit in de volgende kracht:

$$G \frac{mM}{r^2} - m\omega^2 r \sin^2 \omega t = m \left(\frac{GM}{r^2} - \omega^2 r \sin^2 \omega t \right)$$

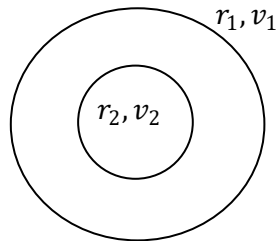
Daarnaast is er een tangentiële kracht richting de evenaar van:

$$m\omega^2 r \cos \omega t \sin \omega t$$

Deeltjes zullen dus een kracht voelen richting de evenaar, wat ervoor zal zorgen dat de bol vervormt naar een ellipsoïde. Dit betekent dat de afstand van het centrum tot het deeltje het kortst is bij de polen en het langst bij de evenaar; hierdoor verschilt de zwaartekracht per locatie. De zwaartekracht is ook afhankelijk van de ingesloten massa; aangezien de afstand van de polen tot het centrum het kleinst is, is de ingesloten massa daar het kleinst. Dus, de zwaartekracht bij de polen neemt toe vanwege de kleinere afstand, maar neemt af vanwege de ingesloten massa. De vervorming van de bol zal resulteren in een ellipsoïde waar evenwicht is bereikt.

(zie ook: <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node109.html>).

Appendix 11.5 Relatie tussen Hoekmoment en Energie



Verschil in kinetische energie van de twee cirkels:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (1)$$

Het hoekmoment is constant, dus:

$$m v_1 r_1 = m v_2 r_2$$

$$v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2} \quad (2)$$

Nu (2) in (1):

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{v_1 r_1}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \quad (3)$$

Dit energieverschil ΔK moet worden geleverd door de centripetale kracht:

$$F = -\frac{m v^2}{r}$$

Energie is:

$$\int_{r_2}^{r_1} F dr = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{m v^2}{r} dr$$

Het hoekmoment is constant, dus:

$$mvr = \text{Const}$$

$$v = \frac{\text{Const}}{mr}$$

$$\begin{aligned} \int_{r_2}^{r_1} F dr &= - \int_{r_2}^{r_1} \frac{m \text{Const}^2}{r^2 m^2 r^2} dr = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{\text{Const}^2}{mr^3} dr = \frac{\text{Const}^2}{2mr^2} \Big|_{r_2}^{r_1} = \frac{\text{Const}^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \\ &= \frac{m^2 v_1^2 r_1^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

We zien dat formule (3) en (4) gelijk zijn, dus:

$$\Delta K = \int_{r_2}^{r_1} F dr = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)$$

Appendix 12 Afleiding van de Euler-Lagrange-vergelijking

We beginnen met een functie f_1 die afhangt van drie variabelen: t , x_1 en $\frac{dx_1}{dt}$:

$$f_1 = f \left(t, x_1(t), \frac{dx_1(t)}{dt} \right) \quad \text{of} \quad f_1 = f(t, x_1, \dot{x}_1) \quad (1)$$

Hier is x_1 een functie van t , dus $\frac{dx_1(t)}{dt}$ is niet nul. In principe is t de enige variabele die de functie f_1 bepaalt. Dus f_1 is een functie van een functie.

Nu beschouwen we de functie f_1 tussen de punten t_1 en t_2 . We integreren nu f_1 tussen deze punten:

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} f_1 dt \quad (2)$$

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} f \left(t, x_1(t), \frac{dx_1(t)}{dt} \right) dt$$

Om de extreme waarde (maximum, zadelpunt of minimum) van I_1 te vinden, geldt:

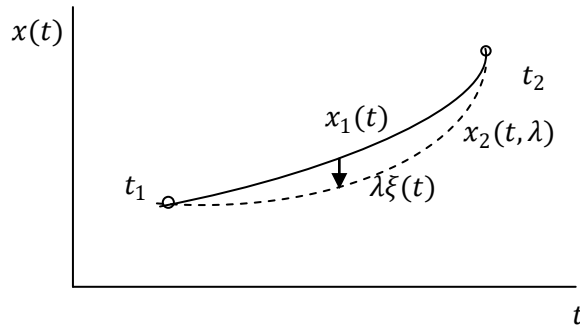
$$\delta I_1 = 0 \quad (3)$$

Om te bewijzen dat I_1 een extreem is, beschouwen we een curve $x_2(t)$ die iets verschoven is, zodat I_2 niet extreem is:

$$x_2(t, \lambda) = x_1(t) + \lambda \xi(t) \quad (4)$$

Hierin is λ een parameter die onafhankelijk is van t . Omdat we een curve beschouwen die loopt van t_1 naar t_2 , verschilt $x_2(t)$ van $x_1(t)$ tussen deze punten, maar op de punten t_1 en t_2 geldt $x_1(t) = x_2(t)$. Dus:

$$\xi(t_1) = 0 \text{ en } \xi(t_2) = 0 \quad (5)$$



Nu is de integraal I_2 voor de aangrenzende curve:

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} f_2 dt \quad (6)$$

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} f\left(t, x_2(t, \lambda), \frac{dx_2(t, \lambda)}{dt}\right) dt$$

Door (6) in te vullen in vergelijking (4), krijgen we:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{t_1}^{t_2} f\left(t, x_2(t, \lambda), \frac{dx_2(t, \lambda)}{dt}\right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f\left(t, x_1(t) + \lambda \xi(t), \frac{d(x_1(t) + \lambda \xi(t))}{dt}\right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f\left(t, x_1(t) + \lambda \xi(t), \frac{dx_1(t)}{dt} + \lambda \frac{d\xi(t)}{dt}\right) dt \end{aligned} \quad (7)$$

Aangezien I_1 een extreme waarde is, is I_2 ook extreem voor $\lambda = 0$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_2 = \text{minimum, zadelpunt of maximum} \quad (8)$$

De extreme waarde kan worden gevonden door de afgeleide te nemen en gelijk te stellen aan nul:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{dI_2}{d\lambda} = 0 \quad (9)$$

In combinatie met vergelijking (6):

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d}{d\lambda} \left(\int_{t_1}^{t_2} f_2 dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\lambda} (f_2 dt) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Dit is een product van twee functies, dus we passen de regel van partiële differentiatie toe:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{df_2}{d\lambda} dt + f_2 \frac{d(dt)}{d\lambda} \right) = 0 \quad (11)$$

Omdat t en λ wederzijds onafhankelijk zijn, is de afgeleide van t naar λ , of vice versa, gelijk aan nul:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{df_2}{d\lambda} dt + f_2 \cdot 0 \right) = 0 \quad (12)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{df_2}{d\lambda} dt = 0$$

Vervolgens passen we de regel van partiële differentiatie toe:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{dt}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d\left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} \right) dt = 0 \quad (13)$$

Door de onafhankelijkheid van t en λ is de eerste term nul:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} \cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d\left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} \right) dt = 0 \quad (14)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d\left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} \right) dt = 0$$

Omdat:

$$\frac{d\left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} = \frac{d^2 x_2}{dt d\lambda} = \frac{d\left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} \quad (15)$$

Leidt vergelijking (14), samen met (15), tot:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d\left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} \right) dt = 0 \quad (16)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d\left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt \right) = 0$$

Nu integreren we het rechterlid van deze vergelijking:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d\left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} d\left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right) \quad (17)$$

$$= \left[\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{dx_2}{d\lambda} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt$$

De afgeleide van x_2 naar λ wordt gevonden door differentiatie van vergelijking (4):

$$\frac{dx_2(t, \lambda)}{d\lambda} = \frac{d(x_1(t) + \lambda \xi(t))}{d\lambda} = 0 + \xi(t) = \xi(t) \quad (18)$$

Omdat de functie $\xi(t)$ nul is aan de grenzen van de integraal (zie vergelijking (5)), verdwijnt de linkerkant van de rechterterm in vergelijking (17):

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt = \left[\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{dx_2}{d\lambda} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt$$

Dus:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt \quad (19)$$

Dit resultaat gecombineerd met vergelijking (16) leidt tot:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} - \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) \right) dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) \right) \frac{dx_2}{d\lambda} dt \right) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Om deze integraal nul te maken, stellen we dat:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) \right) &= 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \left(\frac{dx_1}{dt} \right)} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Nus is λ volledig verdwenen en hebben we een algemene uitdrukking verkregen voor de voorwaarde waaraan een functie moet voldoen zodat de integraal I een extreme waarde heeft.

We zijn begonnen met vergelijking (1) voor onze afleiding, maar we zouden dit startpunt nog algemener kunnen maken door een functie te nemen zoals:

$$f_1 = f\left(t, x_1(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, x_2(t), \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, x_n(t), \frac{dx_n(t)}{dt}\right) \quad 22$$

Dit zou hebben geleid tot een meer algemene vorm van vergelijking (21):

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx_n}{dt}\right)} \right) = 0 \quad (23)$$

Of in een andere notatie:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (24)$$

Vergelijking (24) is de **Euler-Lagrange vergelijking**. Het geeft de voorwaarde aan waaraan een functie moet voldoen zodat de integraal I een extreme waarde is.

Bibliografie & Webbronnen

8 Bibliografie

- Anderson, P. B. (2008, 16 oktober). *A Hafele & Keating like thought experiment*. Verkregen van [https://paulba.no/pdf/H&K like.pdf](https://paulba.no/pdf/H&K%20like.pdf)
- Asmodelle, E. (2017). *Tests of General Relativity: A Review*. University of Central Lancashire (UCLAN).
- Bentvelsen, S. (september 2005 versie 3.0). *Speciale Relativiteitstheorie*. NIKHEF/Onderzoeksinstituut HEF.
- Biesel, O. (2008, 25 januari). *The Precession of Mercury's Perihelion*. Verkregen van <https://sites.math.washington.edu/~morrow/papers/Genrel.pdf>
- Blau, M. (11 june 2018). *Lecture Notes on General Relativity*.
- Blote, H. W. *Introduction to General Relativity*. <http://wwwhome.lorentz.leidenuniv.nl/~henk/grh.pdf>.
- Charles W Misner, K. S. (1932). *Gravitation*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.
- Crowell, B. (11 maart, 2018). *Time distortion arising from motion and gravity*. Libretexts.
- Einstein Relatively Easy*. <http://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity>.
- Einstein, A. (1920). *RELATIVITY - The special and General Relativity*. gemaakt door Jose Menendez.
- Einstein, A. (1916 (herziende editie: 1924)). *Relativity: The Special and General Theory*. Methuen & Vo Ltd.
- Einstein, A. (1997). *The Collected Papers of Albert Einstein*. Princeton University Press.
- Heinicke, Christian en Hehl, Friedrich W. (2015). *Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein's Field Equation*. Dept. Physics & Astron., Univ. of Missouri, Columbia,.
- Hooft, G. ' . *INTRODUCTION TO GENERAL RELATIVITY*. Institute for Theoretical Physics Utrecht University and Spinoza Institute.
- <http://adamauton.com/warp/emc2.html>.
- Janssen, M. *Einstein's First Systematic Exposition of General Relativity*. <https://philpapers.org/rec/JANEFS>.
- M.P Hobson, G. E. (2006). *General Relativity an introduction for Physics*. Cambridge University Press.
- Magnan, C. (n.d.). *Complete calculations of the perihelion precession of Mercury an the degelection of light by the Sun in General Relativity*. Verkregen van <https://arxiv.org/pdf/0712.3709.pdf>
- Oas, G. *Full derivation of the Schwarzschild solution*. EPGY Summer Institute SRGR.
- Pe'er1, A. (2014, 19 februari). *Schwarzschild Solution and Black holes*. Verkregen van <http://www.physics.ucc.ie/appeer/PY4112/Sch.pdf>
- Salas, d. C. *Geometric interpretation of Christoffel symbols and some alternative approaches to calculating them*.
- Schwarzschild, K. (13 januari 1916). *On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*.
- Schwarzschild, K. (24 februari 1916). *On the Gravitational Field of a Sphere of Incompressible Liquid, According to Einstein's Theory*.
- Susskind, L. (2012). *General Relativity*. Stanford University.
- Visser, M. (30 June 2007). *The Kerr spacetime: A brief introduction*. <https://arxiv.org/pdf/0706.0622.pdf>.
- Vlieger, K. d. (2018). http://voorbijeinstein.nl/html/artikel_art.htm. Heeten, Netherlands: Karel de Vlieger.

9 Interessante websites:

http://voorbijeinstein.nl/html/artikel_art_paragraaf_05.htm

<http://star-www.st-and.ac.uk/~hz4/gr/HeavensGR.pdf>

<https://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity/22-geodesics-and-christoffel-symbols>

http://jamesowenweatherall.com/SCPPRG/LehmkuhlDennis2008Man_MassEnergyMomentumGR.pdf

<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/reh10/lectures/nst-mmii-chapter2.pdf> Chapter 2 Poisson's Equation - University of Cambridge

<http://www.mathpages.com/home/kmath711.htm> Poisson's Equation and the Universe

<https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SchwarzschildSolution.pdf> Gary Oas

<https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll3/Carroll7.html>

<http://www.feynmanlectures.caltech.edu/>

<http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf#page577> (Blau, 11 june 2018)

<http://adamauton.com/warp/emc2.html>

<https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SchwarzschildSolution.pdf>

<https://drchristiansalas.com/2017/03/11/geometric-interpretation-of-christoffel-symbols-and-some-alternative-approaches-to-calculating-them/>

<https://stanfordvideo.stanford.edu/leonard-susskinds-general-relativity-lecture-1/>

https://www.youtube.com/playlist?list=PLQrxduI9Pds1fm91Dmn8x1lo-O_kpZGk8

<https://arxiv.org/pdf/0706.0622.pdf>

EINSTEINS ALGEMENE RELATIVITEITSTHEORIE

Een Tensoranalytische Benadering

met

Experimentele Verificatie

door

Albert Prins

EINDE

Uw feedback is welkom via:

aprins@hotmail.com